

Übungsaufgaben zu “Mathematisches Modellieren”: Blatt X

Prof. Dr. Massimo Bertolini

Universität Duisburg-Essen, WS 2022-23

Aufgabe X.1 (13 Punkte):

Seien

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \quad G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-3t} - 4te^{-3t} \\ -2te^{-3t} \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie ein 2×2 lineares Differentialgleichungssystem, dessen Fundamentalsystem gleich $(H(t), G(t))$ ist.

Aufgabe X.2 (13 Punkte):

Betrachten Sie das folgende nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{u} = u - 3u^2 - uv \\ \dot{v} = -2v + 2uv, \end{cases}$$

welches ein entdimensionalisiertes Räuber-Beute Modell mit logistischem Wachstum der Beute darstellt. Mit Hilfe des Satzes von Grobman-Hartman skizzieren Sie qualitativ das Phasenporträt in einer Umgebung des stationären Punktes $(1/3, 0)$.

Aufgabe X.3 (14 Punkte):

Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraumes der Lösungen.

Tipp: Durch Setzen von $y(t) = \dot{x}(t)$ erhält man ein 2×2 lineares Differentialgleichungssystem.