Übungsaufgaben zu "Mathematisches Modellieren": Blatt VIII

Prof. Dr. Massimo Bertolini
Universität Duisburg-Essen, WS 2022-23

Aufgabe VIII.1 (10 Punkte):
Sei

$$F : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (t, x) \longmapsto F(t, x)$$

mit $t \in \mathbb{R}^\ell$ und $x \in \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass F stetig differenzierbar bezüglich $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ist (d.h. die partielle Ableitungen $(\partial_{x_i} F)(t, x)$ von F nach x_i, $i = 1, \ldots, m$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$). Beweisen Sie, dass F lokal Lipschitz-stetig bezüglich x ist.

Aufgabe VIII.2 (5+7=12 Punkte):
Betrachten Sie ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = F(t, x)$$

mit

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (t, x) \longmapsto F(t, x)$$

stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich der Variablen x.

a) Zeigen Sie, dass die Graphen der maximalen Lösungen eine Partition von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definieren.

b) Zeigen Sie, dass die Trajektorien der Lösungen nicht unbedingt eine Partition von $\mathbb{R}^n$ definieren, wenn das Differentialgleichungssystem nicht autonom ist.

Aufgabe VIII.3 (5+5+8=18 Punkte):
Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - v) \\ \dot{v} = av \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die konstanten Lösungen und die Nullklinen. Skizzieren Sie die Richtung der Trajektorien in den verschiedenen Sektoren des ersten Quadranten der (u, v)-Ebene, welche durch die Nullklinen geteilt werden.

b) Bestimmen Sie eine Lyapunov-Funktion $H(u, v)$.

c) Bestimmen Sie die explizite Lösung $(u(\tau), v(\tau))$ für die Anfangswertbedingung

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Man kann das obige Differentialgleichungssystem als Beute-Räuber Modell ohne Interaktionsterm in der zweiten Differentialgleichung interpretieren. Was passiert mit der Beutepopulation in diesem Modell wenn $\tau \to +\infty$?