Übungsaufgaben zu "Mathematisches Modellieren": Blatt IX

Prof. Dr. Massimo Bertolini
Universität Duisburg-Essen, WS 2022-23

Aufgabe IX.1 (12 Punkte):
Sei
$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (u, v) \longmapsto au - a\ln(u) + v - \ln(v), \qquad a > 0$$
die Lyapunov-Funktion für das Lotka-Volterra Differentialgleichungssystem. Anhand des Satzes über implizite Funtionen zeigen Sie, dass für $c > a + 1$ die Niveaumenge
$$\mathcal{N}_c = \{(u, v) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} : H(u, v) = c\}$$
eine glatte, geschlossene Kurve in der (u, v)-Ebene definiert, welche positiven Abstand von der u- und v-Achse sowie von dem Koexistenzzustand $P_1^* = (1, 1)$ hat.

Aufgabe IX.2 (5+9=14 Punkte):
Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem
$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - u/2) - uv \\ \dot{v} = 2v(-1 + u) \ , \end{cases}$$
welches ein entdimensionalisiertes Räuber-Beute Modell mit logistischem Wachstum der Beute darstellt.

a) Berechnen Sie die konstanten Lösungen und die Nullklinen. Skizzieren Sie die Richtung der Trajektorien in den verschiedenen Sektoren des ersten Quadranten der (u, v)-Ebene, welche durch die Nullklinen geteilt werden.

b) Berechnen Sie die lineare Approximation des obigen Differentialgleichungssystems in der Umgebung jeder konstanten Lösung.

Aufgabe IX.3 (9+5=14 Punkte):
Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem
$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = 4x_1(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x_2}(t) = 3x_2(t) \\ \dot{x_3}(t) = -2x_1(t) - x_3(t) \end{cases}$$
a) Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungen.

b) Bestimmen Sie die Lösung, welche die Angangswertbedingung $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 4, 2)$ erfüllt.