# Heckealgebren

Jan Kohlhaase

Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Antrittsvorlesung

$$T_w T_{w'} = \begin{cases} T_{ww'} & \text{falls} \quad \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ (t-1)\,T_w + t & \text{falls} \quad w = w' \in S \end{cases}$$

# Inhalt des Vortrags

I. Historische Entwicklung

II. Darstellungen und Heckemoduln

III. Iwahori-Hecke-Algebren

IV. Anwendungen

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)
- 1912 Habilitation in Göttingen

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)
- 1912 Habilitation in Göttingen
- 1919–1947 Universität Hamburg

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)
- 1912 Habilitation in Göttingen
- 1919–1947 Universität Hamburg
- gestorben 1947 in Kopenhagen

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)
- 1912 Habilitation in Göttingen
- 1919–1947 Universität Hamburg
- gestorben 1947 in Kopenhagen

## Arbeitsgebiet

- analytische & algebraische Zahlentheorie

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)
- 1912 Habilitation in Göttingen
- 1919–1947 Universität Hamburg
- gestorben 1947 in Kopenhagen

## Arbeitsgebiet

- analytische & algebraische Zahlentheorie
- Theorie der Modulformen

# I. Historische Entwicklung

Oberwolfach Photo Collection
©L. Reidemeister

## Erich Hecke

- geboren 1887 in Buk (Provinz Posen)
- 1910 Promotion in Göttingen (Hilbert)
- 1912 Habilitation in Göttingen
- 1919–1947 Universität Hamburg
- gestorben 1947 in Kopenhagen

## Arbeitsgebiet

- analytische & algebraische Zahlentheorie
- Theorie der Modulformen
- Querverbindungen!

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- *Holomorphiebedingungen*

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- *Holomorphiebedingungen*

$\rightsquigarrow$ *Periodizität:* $f(z) = f(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- *Holomorphiebedingungen*

$\rightsquigarrow$ *Periodizität:* $f(z) = f(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$

$\rightsquigarrow$ *Dirichletreihe:* $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- *Holomorphiebedingungen*

$\rightsquigarrow$ *Periodizität:* $f(z) = f(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$

$\rightsquigarrow$ *Dirichletreihe:* $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$

Eine geeignet normalisierte Reihe $\Lambda(s,f)$

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- *Holomorphiebedingungen*

$\rightsquigarrow$ *Periodizität:* $f(z) = f(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$

$\rightsquigarrow$ *Dirichletreihe:* $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$

Eine geeignet normalisierte Reihe $\Lambda(s,f)$

- besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ komplexe obere Halbebene
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ operiert auf $\mathbb{H}$

## Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$

Funktionen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit gewissen Zusatzeigenschaften:

- *Transformationsverhalten:* $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- *Holomorphiebedingungen*

$\rightsquigarrow$ *Periodizität:* $f(z) = f(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$

$\rightsquigarrow$ *Dirichletreihe:* $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$

Eine geeignet normalisierte Reihe $\Lambda(s,f)$

- besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene
- erfüllt eine Funktionalgleichung der Form $\Lambda(s,f) = \Lambda(k-s,f)$.

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung
  z.B. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung
  z.B. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ $\leftsquigarrow$ *arithmetischen Ursprungs*

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung
  z.B. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ $\leftsquigarrow$ *arithmetischen Ursprungs*

## Heckeoperatoren und Eulerprodukte

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung
  z.B. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ $\leftsquigarrow$ *arithmetischen Ursprungs*

## Heckeoperatoren und Eulerprodukte

- Raum der Modulformen $\circlearrowleft$ Algebra paarweise kommutierender Operatoren

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung
  z.B. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ $\leftsquigarrow$ *arithmetischen Ursprungs*

## Heckeoperatoren und Eulerprodukte

- Raum der Modulformen $\circlearrowleft$ Algebra paarweise kommutierender Operatoren
- $L(s, f)$ besitzt Produktentwicklung $\iff$ $f$ ist gemeinsamer Eigenwert

# Dirichletreihen in der arithmetischen Geometrie

- Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
- L-Reihe $L_E(s)$ einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$
- u.v.m.

## Problem der Modularität

Kommen diese Dirichletreihen von Modulformen her?

- Zusätzliche Eigenschaft: Produktentwicklung
  z.B. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ $\rightsquigarrow$ *arithmetischen Ursprungs*

## Heckeoperatoren und Eulerprodukte

- Raum der Modulformen $\circlearrowleft$ Algebra paarweise kommutierender Operatoren
- $L(s, f)$ besitzt Produktentwicklung $\iff$ $f$ ist gemeinsamer Eigenwert

E. Hecke: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, *Math. Ann.* **114**, No. 1, 1–28, (1937)

# II. Darstellungen und Heckemoduln

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper
- $V$ ein $K$-Vektorraum

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper
- $V$ ein $K$-Vektorraum
- $G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ("*$K$-lineare $G$-Darstellung*")

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper
- $V$ ein $K$-Vektorraum
- $G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ("*$K$-lineare $G$-Darstellung*")

## Beispiel

- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper
- $V$ ein $K$-Vektorraum
- $G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ("*$K$-lineare $G$-Darstellung*")

## Beispiel

- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$
- $K = \mathbb{C}$

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper
- $V$ ein $K$-Vektorraum
- $G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ("*$K$-lineare $G$-Darstellung*")

## Beispiel

- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$
- $K = \mathbb{C}$
- $V =$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene

# II. Darstellungen und Heckemoduln

## Darstellungen

- $G$ eine Gruppe
- $K$ ein Körper
- $V$ ein $K$-Vektorraum
- $G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ("*$K$-lineare $G$-Darstellung*")

## Beispiel

- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$
- $K = \mathbb{C}$
- $V =$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G$-Operation: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ entspricht $f(z) \mapsto f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$:

Abbildungen $G \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$:

Abbildungen $G \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

- konstant auf jeder Doppelnebenklasse $HgH \in H\backslash G/H$

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$:

Abbildungen $G \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

- konstant auf jeder Doppelnebenklasse $HgH \in H\backslash G/H$
- Null außerhalb endlich vieler Doppelnebenklassen

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$:

Abbildungen $G \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

- konstant auf jeder Doppelnebenklasse $HgH \in H\backslash G/H$
- Null außerhalb endlich vieler Doppelnebenklassen

*Addition:* punktweise

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$:

Abbildungen $G \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

- konstant auf jeder Doppelnebenklasse $HgH \in H\backslash G/H$
- Null außerhalb endlich vieler Doppelnebenklassen

*Addition:* punktweise
*Faltungsprodukt:* $(\varphi * \psi)(g') = \sum_{g \in G/H} \varphi(g)\psi(g^{-1}g')$

## Heckemoduln

- $V$ eine $K$-lineare $G$-Darstellung
- $H$ eine Untergruppe von $G$
- Unterraum der $H$-Invarianten: $V^H = \{v \in V \mid h \cdot v = v \text{ für alle } h \in H\}$

*Beachte:* Im Allgemeinen ist $V^H$ selbst keine $G$-Darstellung mehr!

*Annahme:* Für $g \in G$ ist $H/(H \cap gHg^{-1})$ stets endlich.

## Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$:

Abbildungen $G \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

- konstant auf jeder Doppelnebenklasse $HgH \in H\backslash G/H$
- Null außerhalb endlich vieler Doppelnebenklassen

*Addition:* punktweise
*Faltungsprodukt:* $(\varphi * \psi)(g') = \sum_{g \in G/H} \varphi(g)\psi(g^{-1}g')$

$\rightsquigarrow$ $V^H$ ist Heckemodul vermöge $HgH * v = \sum_{h \in H/(H \cap gHg^{-1})} hgv \in V^H$

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme
- $V^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ist Heckemodul

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme
- $V^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ist Heckemodul

## klassische Heckeoperatoren

entsprechen den Doppelnebenklassen $T_m = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right) \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $m \in \mathbb{Z}$

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme
- $V^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ist Heckemodul

## klassische Heckeoperatoren

entsprechen den Doppelnebenklassen $T_m = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right) \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $m \in \mathbb{Z}$

## Darstellungen vs. Heckemoduln – ein Programm

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme
- $V^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ist Heckemodul

## klassische Heckeoperatoren

entsprechen den Doppelnebenklassen $T_m = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right) \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $m \in \mathbb{Z}$

## Darstellungen vs. Heckemoduln – ein Programm

1. Studiere den Übergang $V \mapsto V^H$ von Darstellungen zu Heckemoduln

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme
- $V^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ist Heckemodul

## klassische Heckeoperatoren

entsprechen den Doppelnebenklassen $T_m = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right) \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $m \in \mathbb{Z}$

## Darstellungen vs. Heckemoduln – ein Programm

1. Studiere den Übergang $V \mapsto V^H$ von Darstellungen zu Heckemoduln
2. Untersuche die Struktur der Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$

## Beispiel

- $V$ meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene
- $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ und $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllen die Annahme
- $V^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ ist Heckemodul

## klassische Heckeoperatoren

entsprechen den Doppelnebenklassen $T_m = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right) \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $m \in \mathbb{Z}$

## Darstellungen vs. Heckemoduln – ein Programm

1. Studiere den Übergang $V \mapsto V^H$ von Darstellungen zu Heckemoduln
2. Untersuche die Struktur der Heckealgebra $K[H\backslash G/H]$
3. Klassifiziere Heckemoduln bis auf Isomorphie

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

- *Erzeuger:* Transpositionen $s_i = (i \;\; i{+}1)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

- *Erzeuger:* Transpositionen $s_i = (i \;\; i{+}1)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$
- *Relationen:* $s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| > 1$ und
  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für $1 \leqslant i < n-1$

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

- *Erzeuger:* Transpositionen $s_i = (i \;\; i{+}1)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$
- *Relationen:* $s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| > 1$ und
  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für $1 \leqslant i < n-1$

## Coxetergruppen

sind Gruppen $W$ mit einer Präsentation der Form

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

- *Erzeuger:* Transpositionen $s_i = (i \;\; i{+}1)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$
- *Relationen:* $s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| > 1$ und
  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für $1 \leqslant i < n-1$

## Coxetergruppen

sind Gruppen $W$ mit einer Präsentation der Form

- *Erzeuger:* $s \in S$ für eine endliche Teilmenge $S \subseteq W$

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

- *Erzeuger:* Transpositionen $s_i = (i \;\; i{+}1)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$
- *Relationen:* $s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| > 1$ und
  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für $1 \leqslant i < n-1$

## Coxetergruppen

sind Gruppen $W$ mit einer Präsentation der Form

- *Erzeuger:* $s \in S$ für eine endliche Teilmenge $S \subseteq W$
- *Relationen:* $s^2 = (ss')^{\mathrm{ord}_W(ss')} = 1$ mit $\mathrm{ord}_W(ss') \geqslant 2$
  für alle $s, s' \in S$ mit $s \neq s'$

# III. Iwahori-Hecke-Algebren

$S_n$ = Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$

- *Erzeuger:* Transpositionen $s_i = (i \;\; i{+}1)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$
- *Relationen:* $s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| > 1$ und
  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für $1 \leqslant i < n-1$

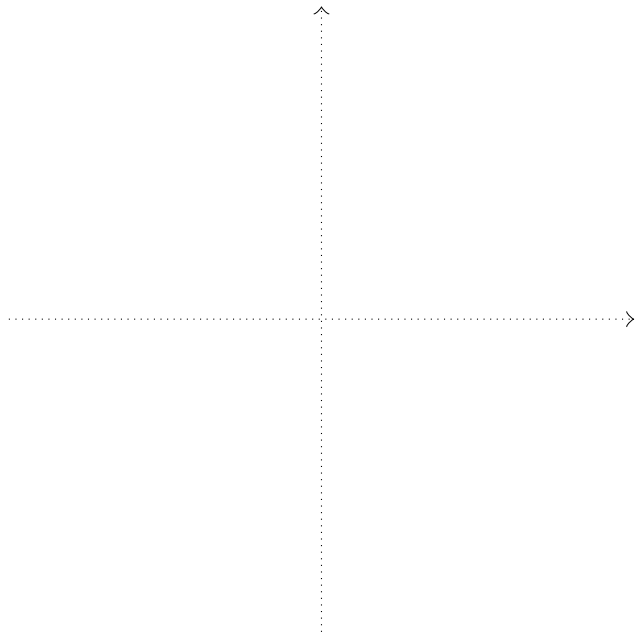
## Coxetergruppen

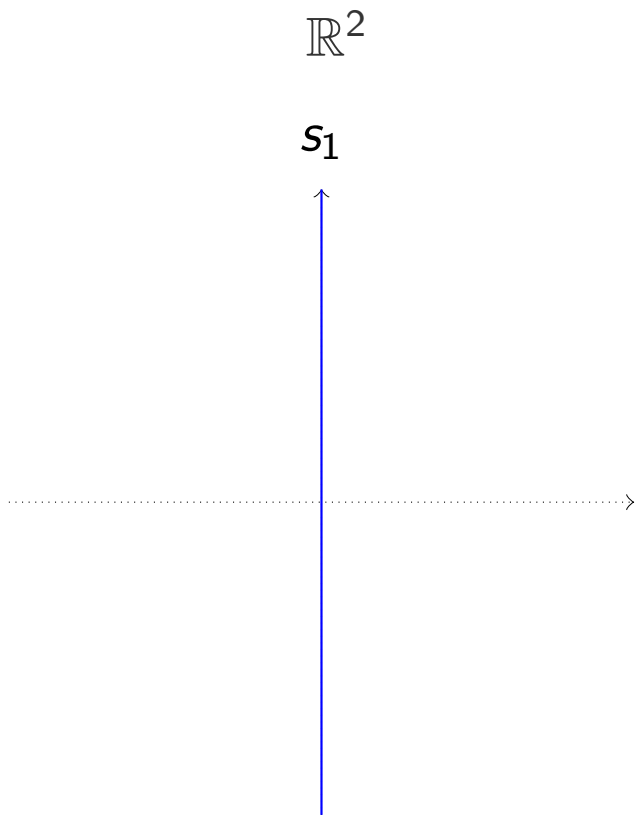
sind Gruppen $W$ mit einer Präsentation der Form

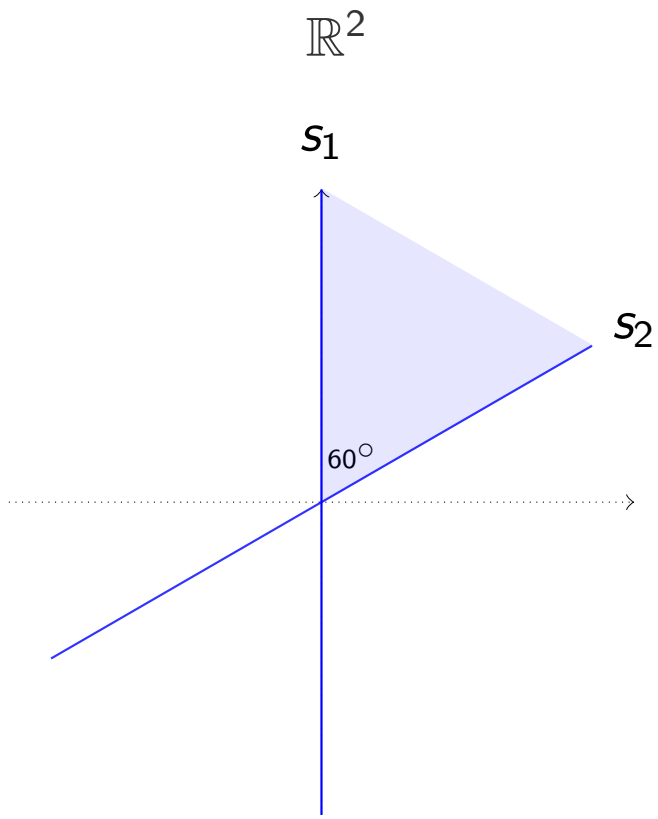
- *Erzeuger:* $s \in S$ für eine endliche Teilmenge $S \subseteq W$
- *Relationen:* $s^2 = (ss')^{\mathrm{ord}_W(ss')} = 1$ mit $\mathrm{ord}_W(ss') \geqslant 2$
  für alle $s, s' \in S$ mit $s \neq s'$

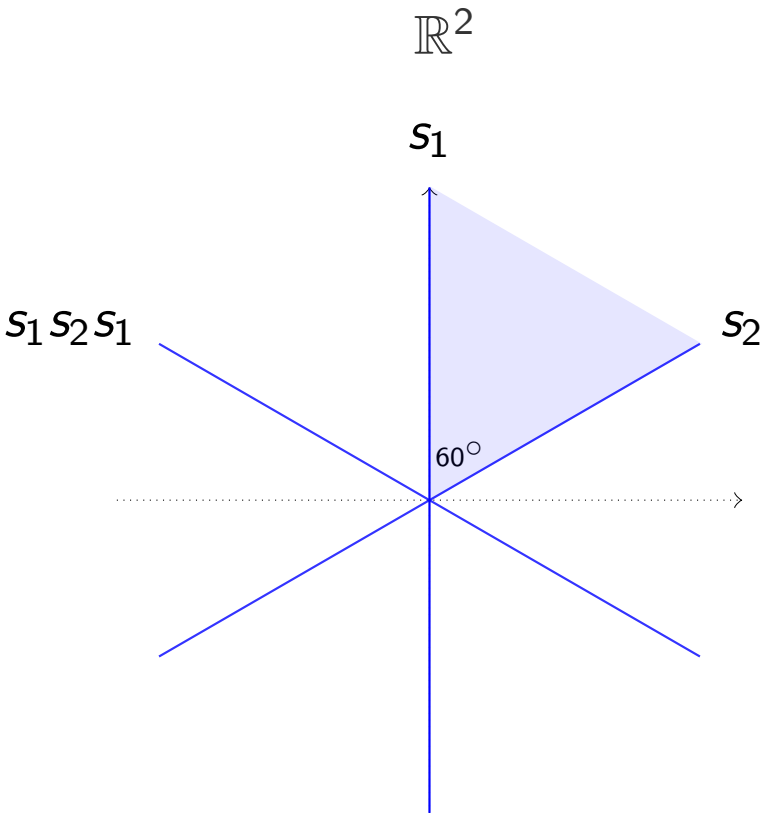
*Beispiel:* endliche und affine Spiegelungsgruppen

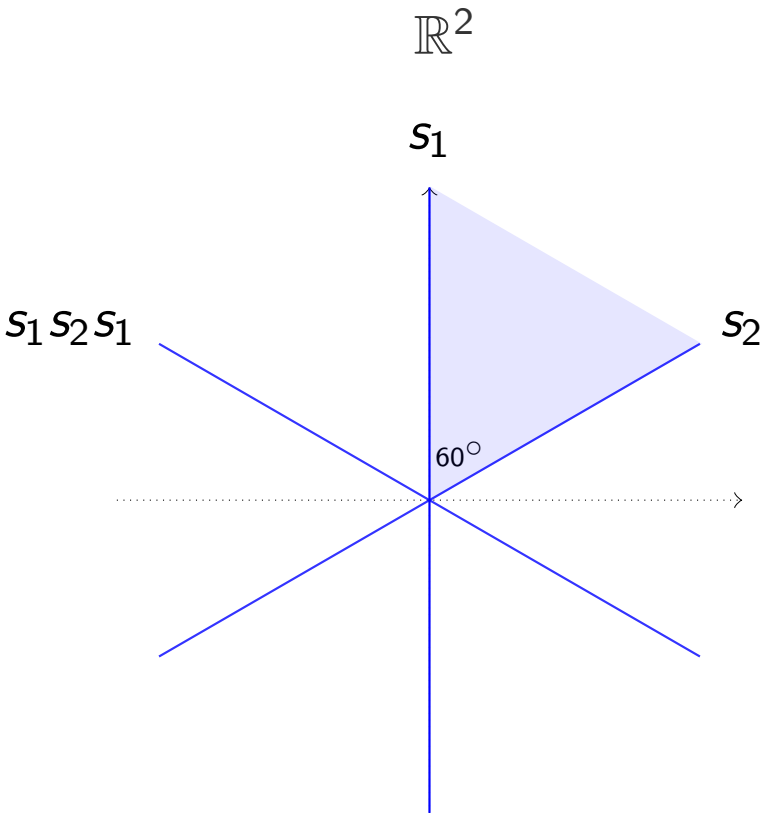
$\mathbb{R}^2$



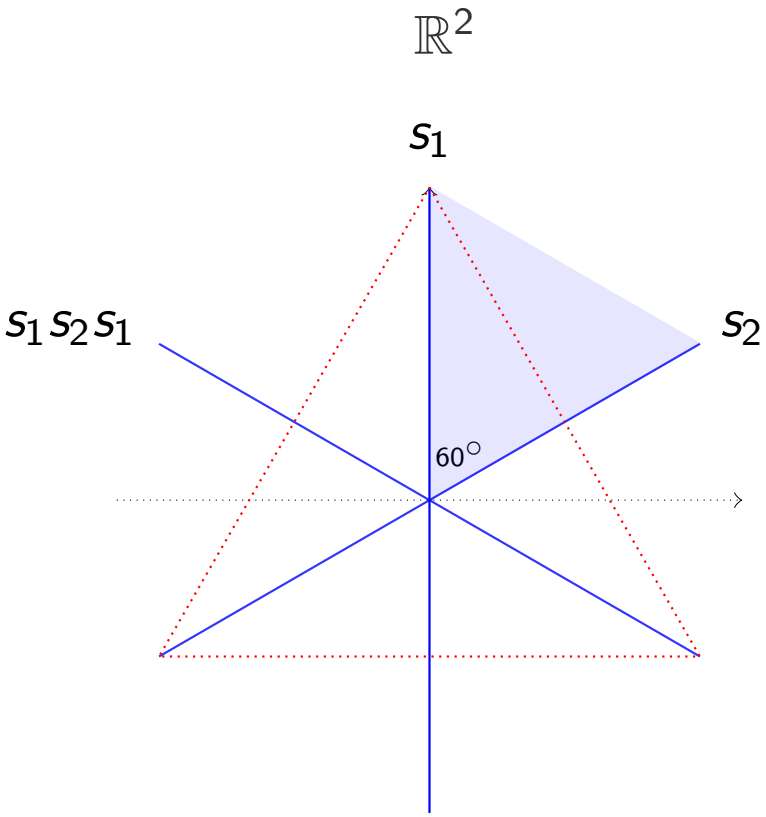

$\mathbb{R}^2$
$s_1$


$\mathbb{R}^2$
$s_1$
$s_2$
$60^\circ$


$\mathbb{R}^2$
$s_1$
$s_1 s_2 s_1$
$s_2$
$60^\circ$

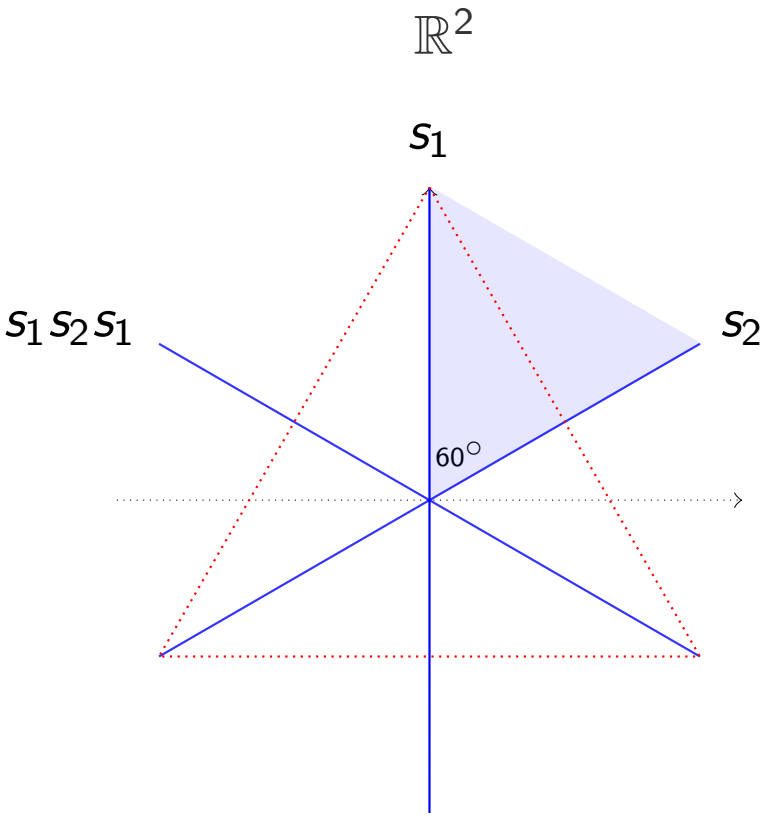



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$



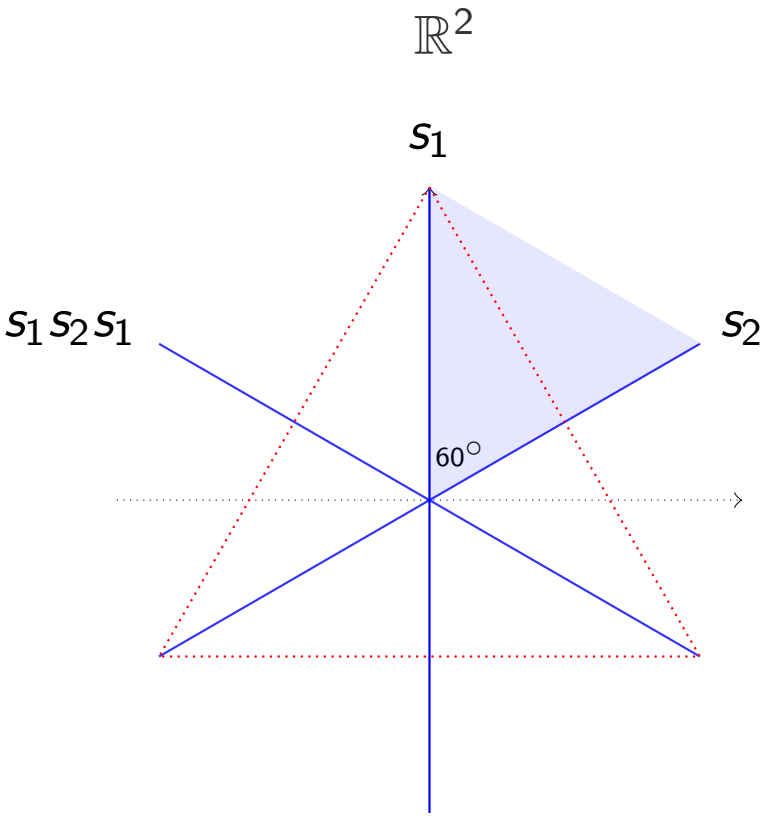

$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

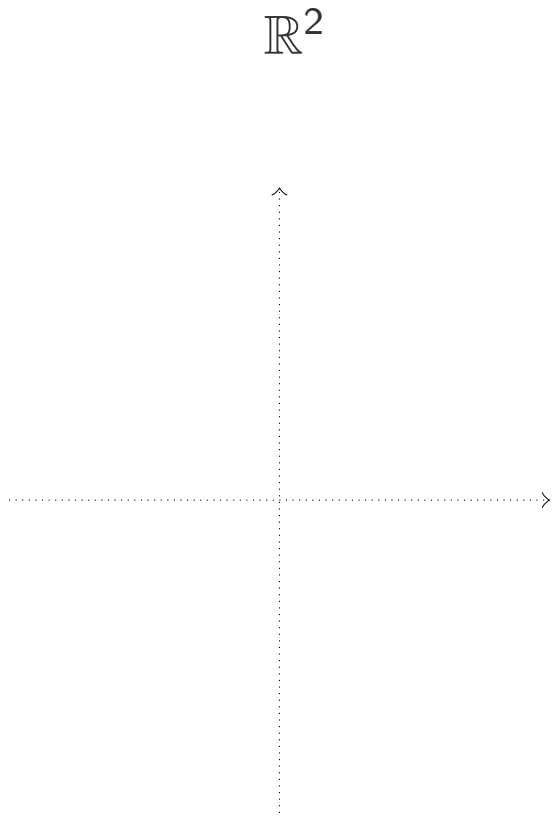
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*




$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

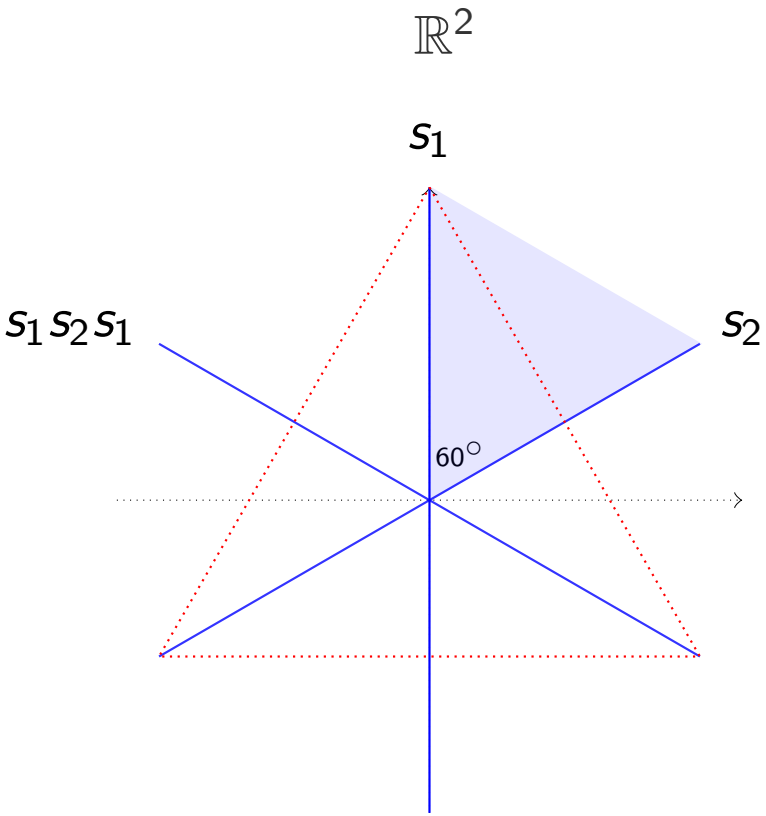
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

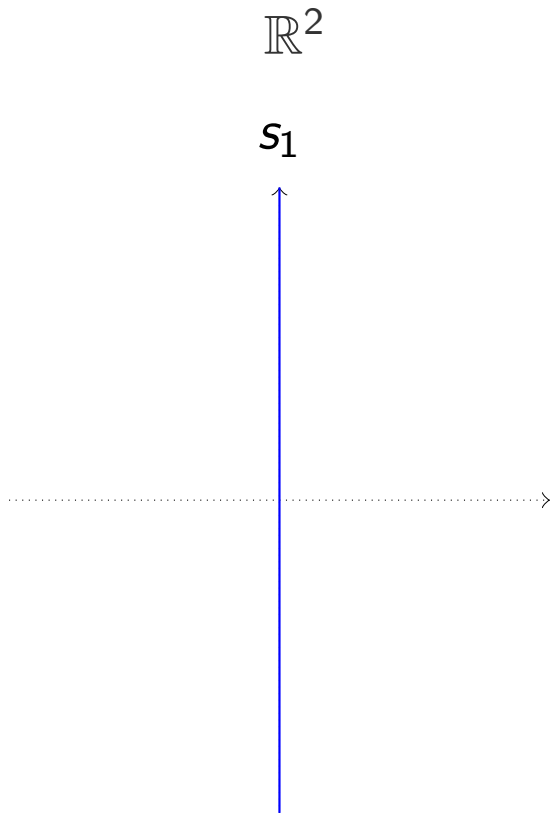



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

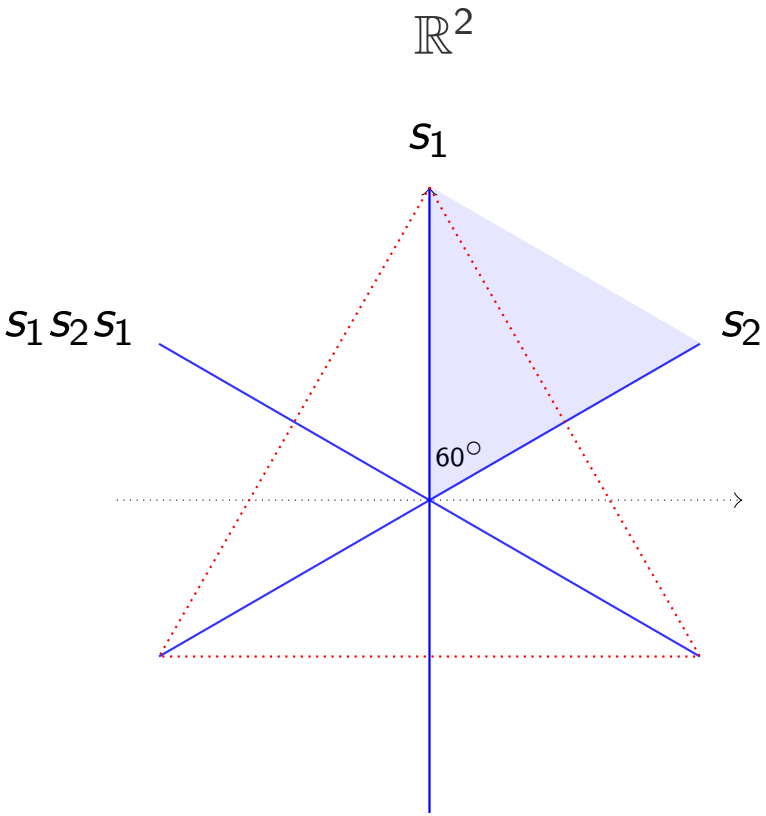
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

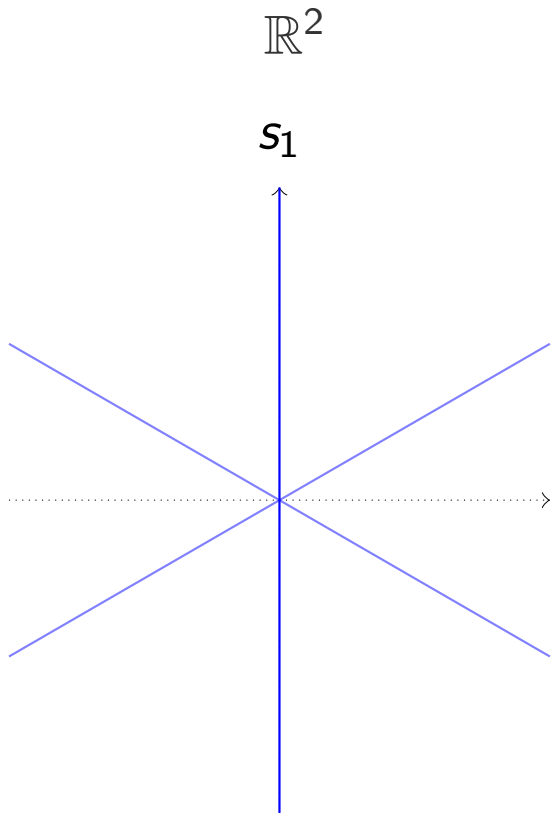



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

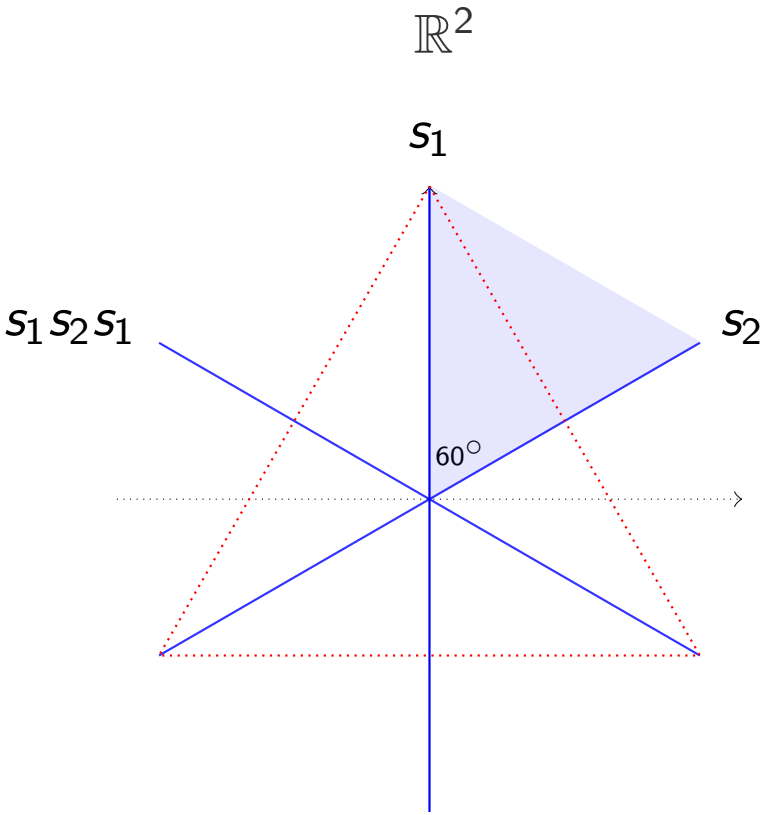
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

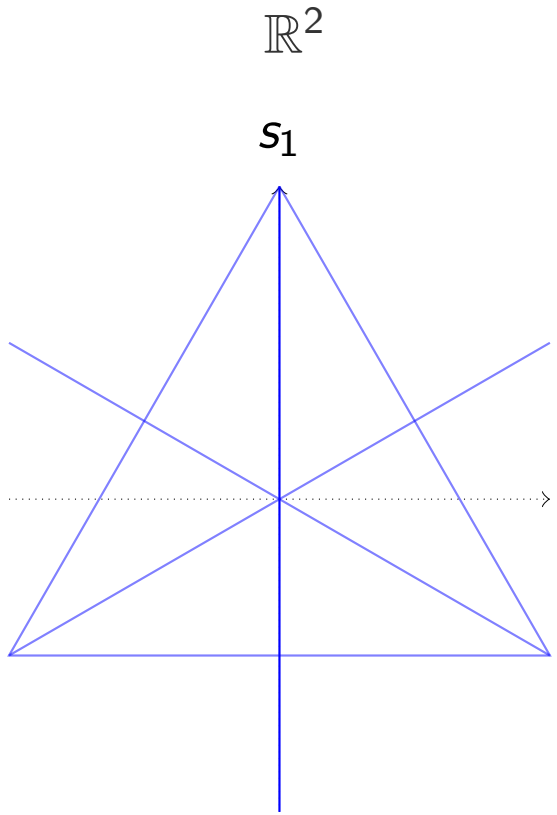



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

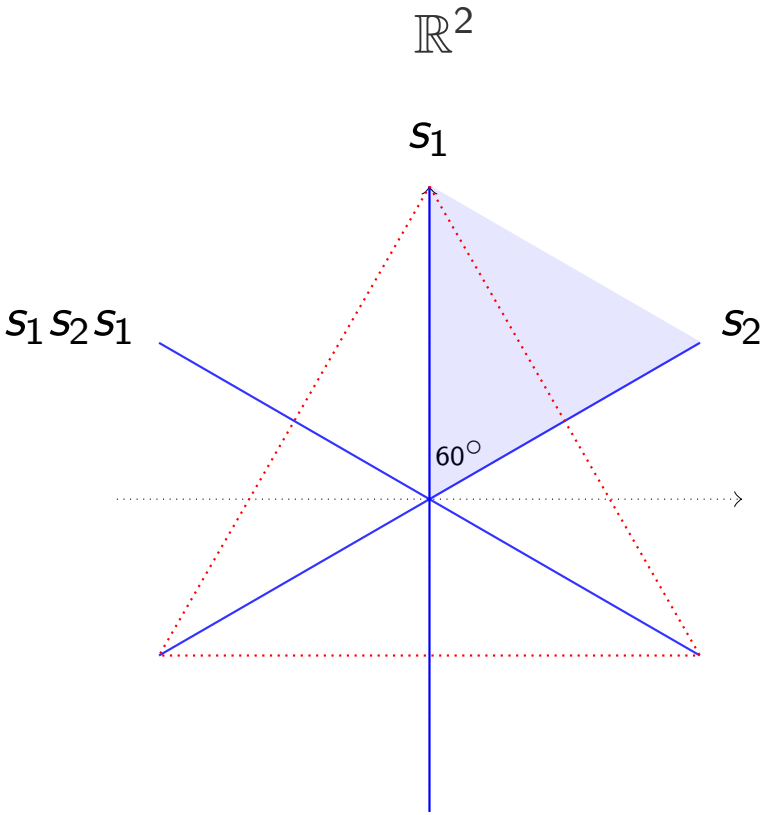
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

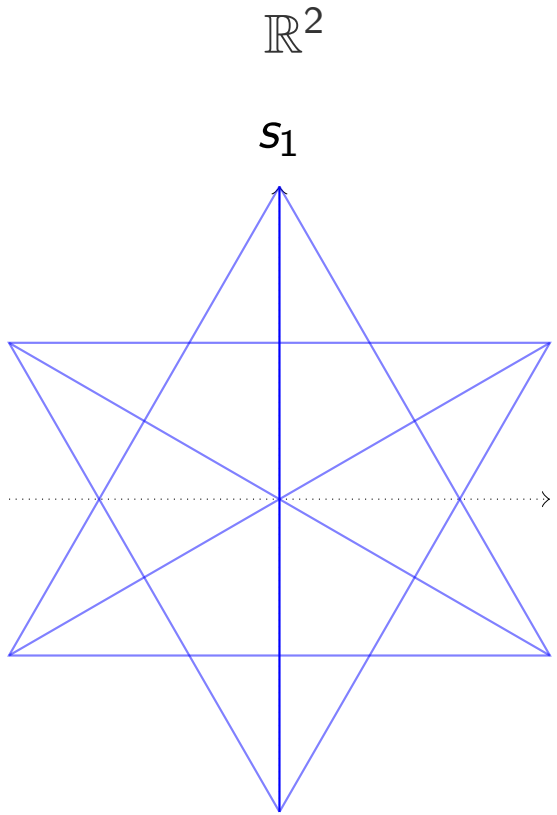



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

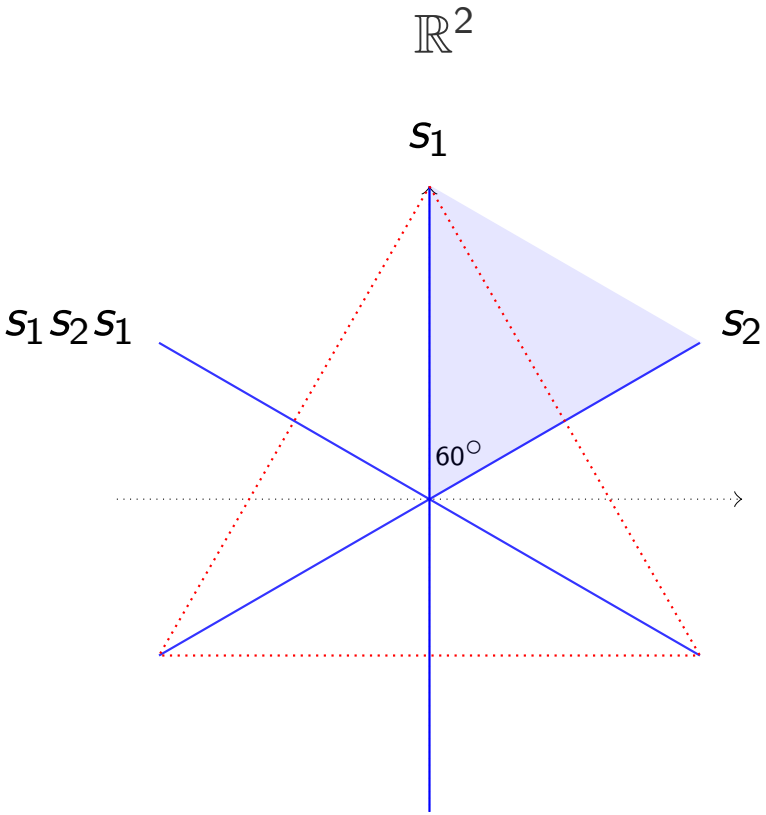
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

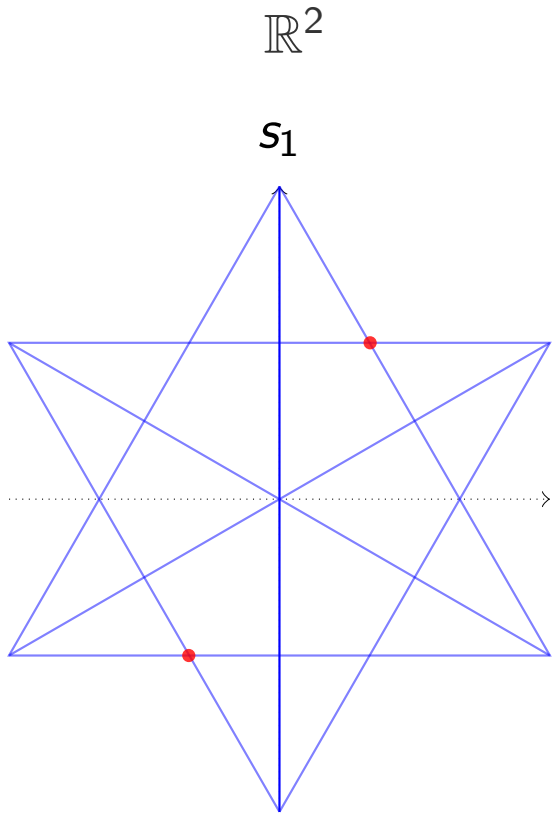



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

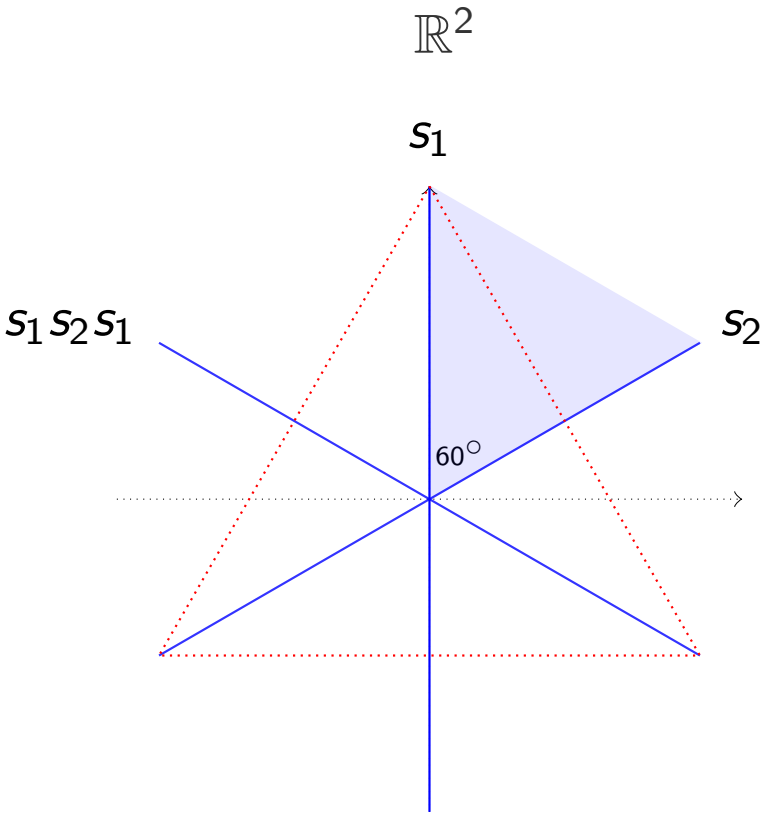
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

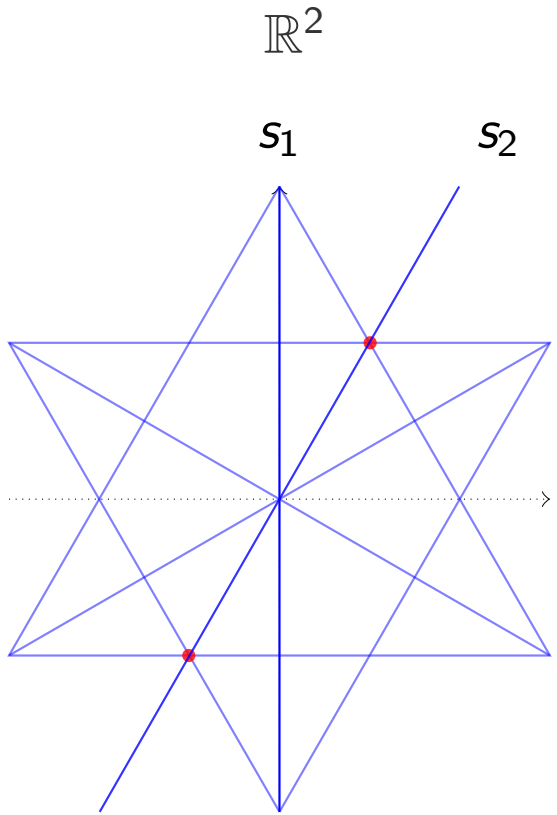



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

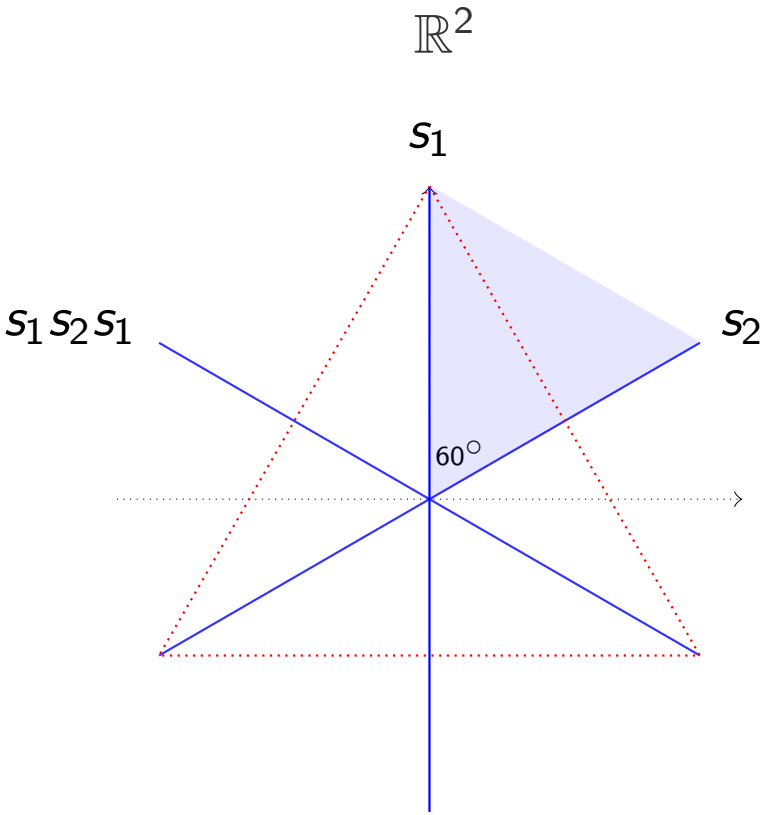
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

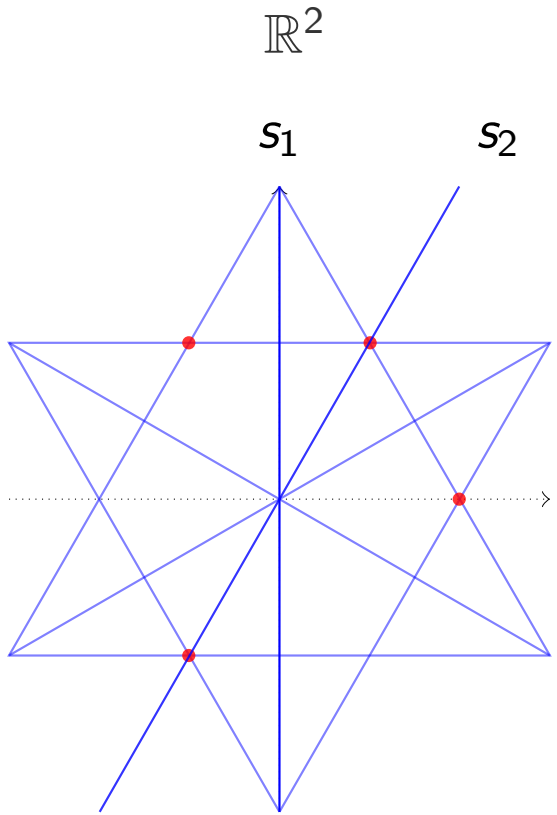



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

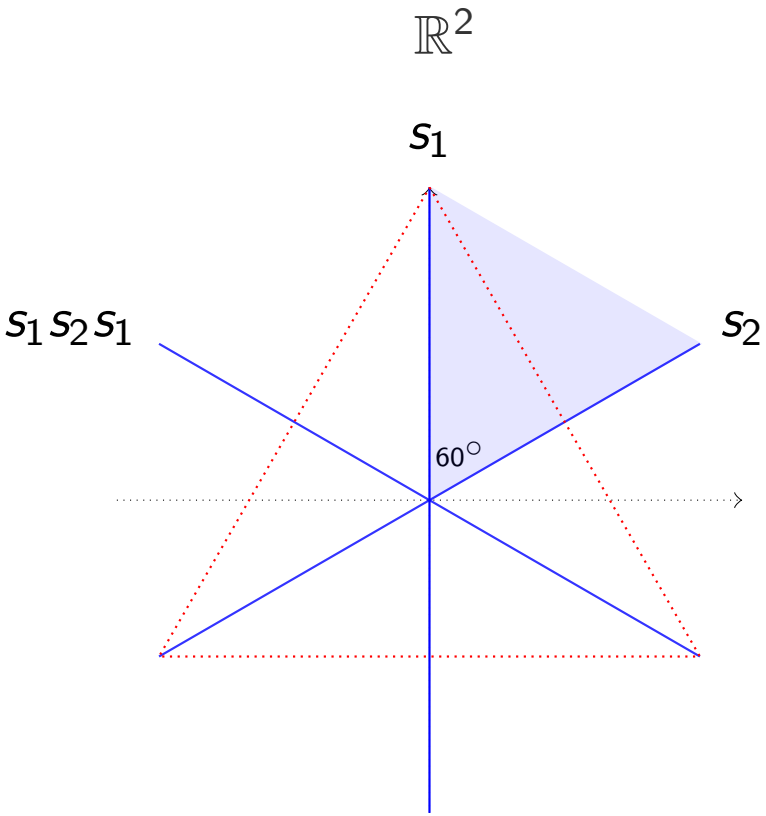
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

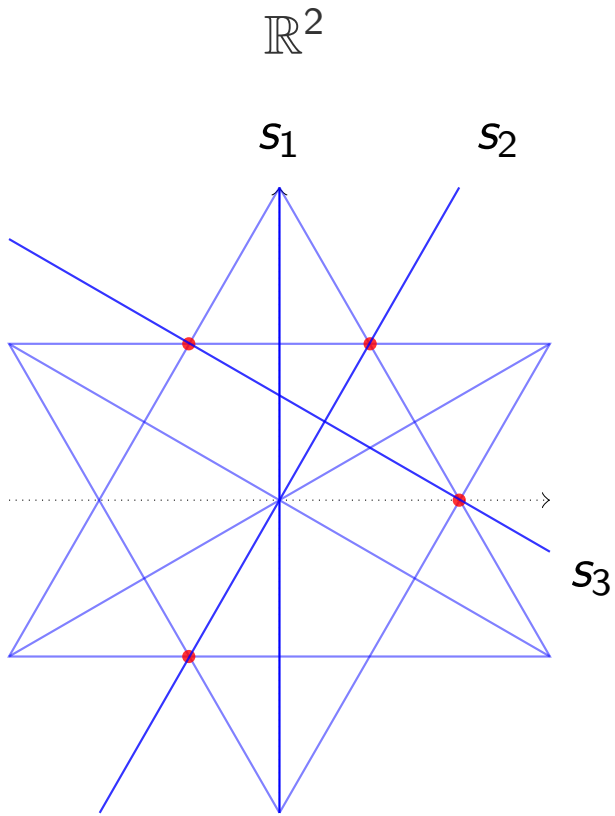



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

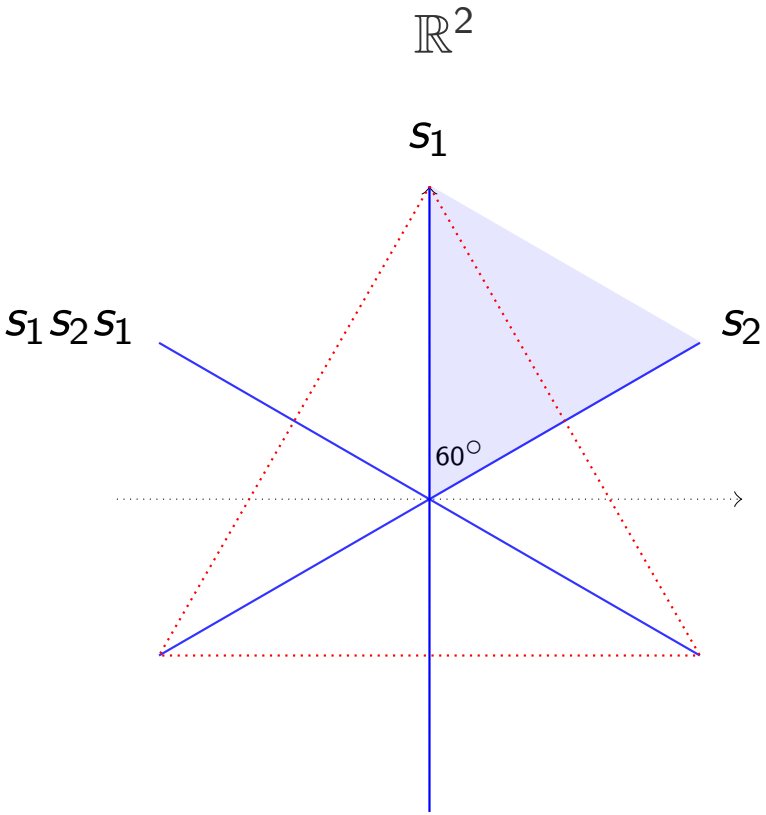
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

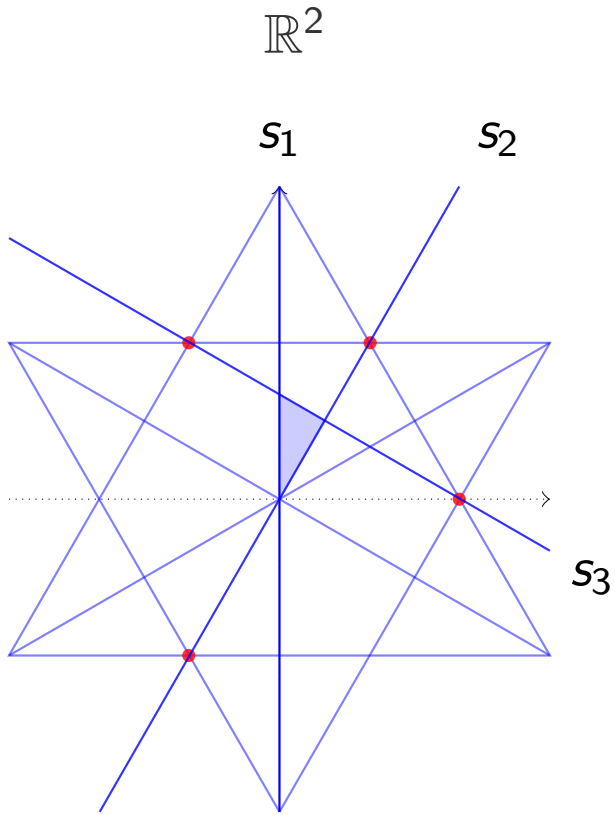



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

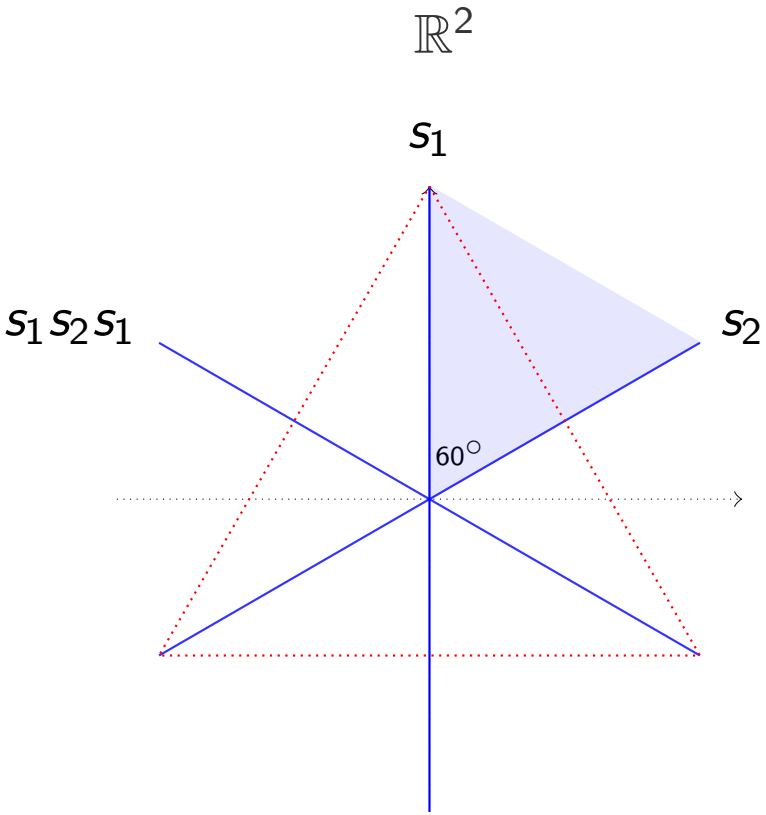
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

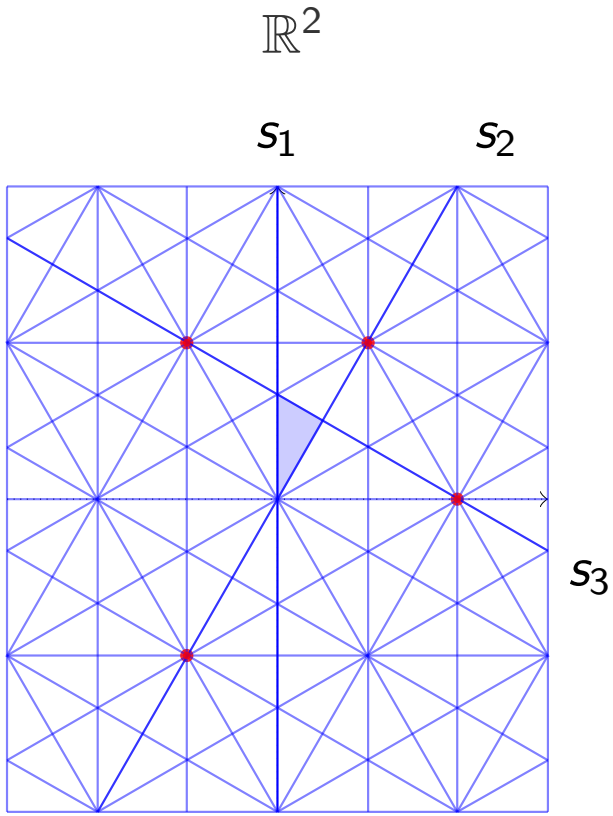



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

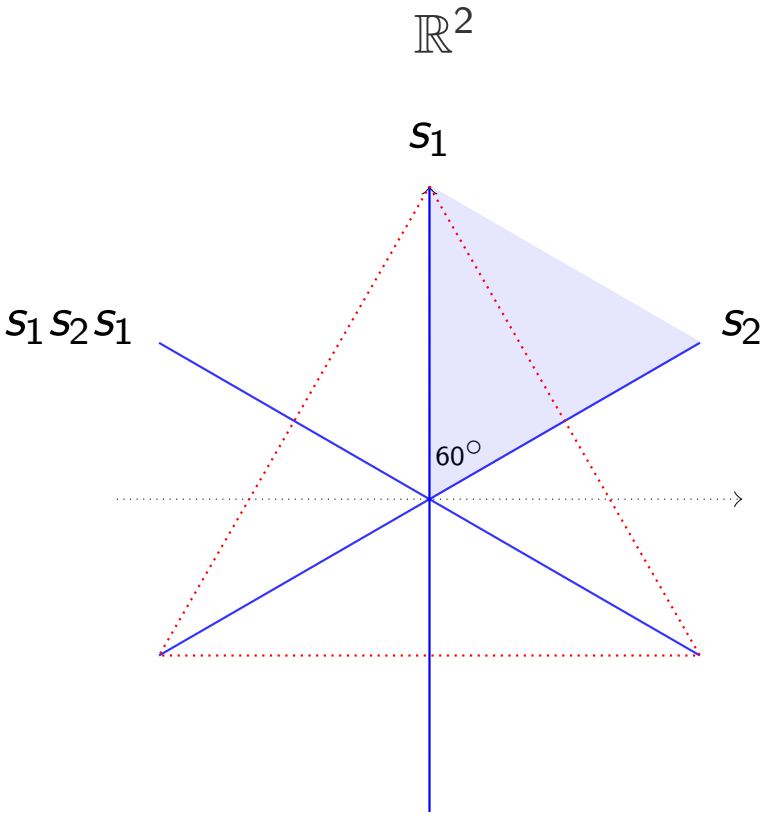
*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

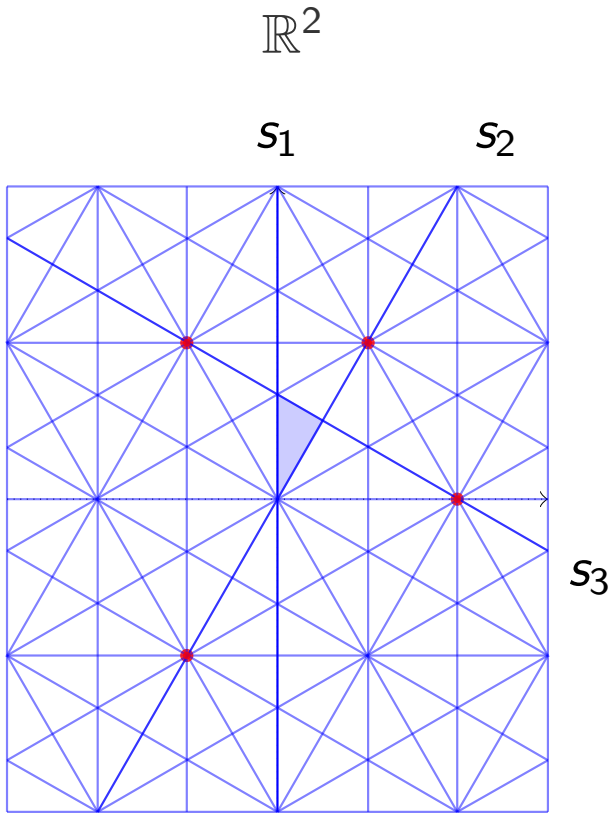



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*

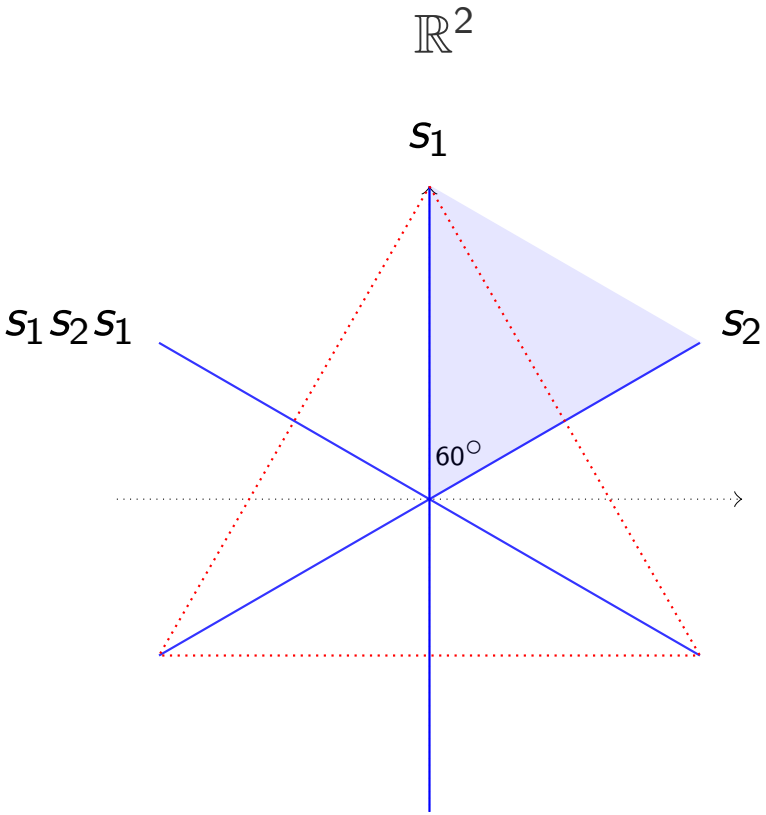



$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

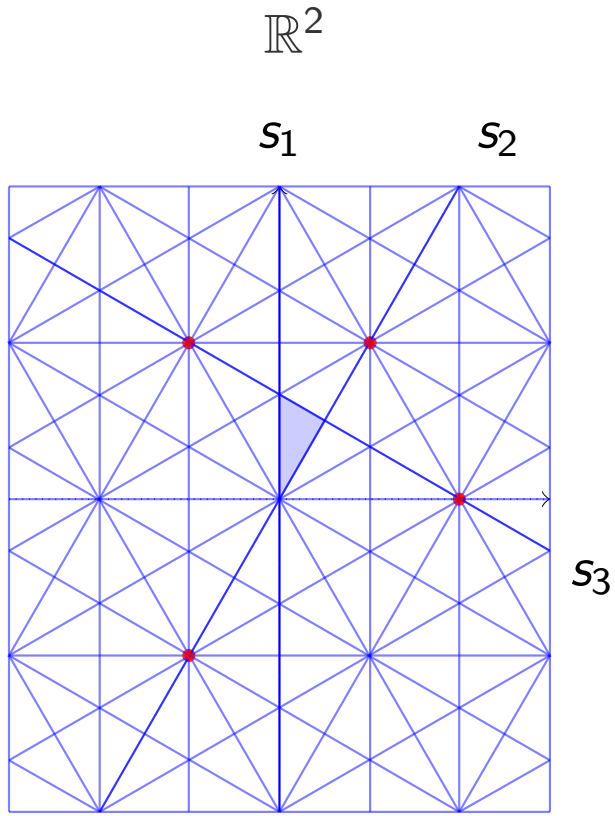
$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle \cong D_6 \rtimes \mathbb{Z}^2$$

*Weylgruppe des Wurzelsystems $A_2$*




$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3 \cong D_3$$

*affine Weylgruppe des Wurzelsystems $G_2$*




$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle \cong D_6 \rtimes \mathbb{Z}^2$$

- $(W, S)$ Coxetersystem

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal
  $\rightsquigarrow \ell(w) = r$ heißt die *Länge* von $w$

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal
  $\rightsquigarrow \ell(w) = r$ heißt die *Länge* von $w$
- $\mathbb{Z}[t]$ Polynomring in der Variablen $t$ über $\mathbb{Z}$

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal
  $\rightsquigarrow \ell(w) = r$ heißt die *Länge* von $w$
- $\mathbb{Z}[t]$ Polynomring in der Variablen $t$ über $\mathbb{Z}$
- setze

$$\mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[t] \cdot T_w$$

freier $\mathbb{Z}[t]$-Modul mit Basis $(T_w)_{w \in W}$

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal
  $\rightsquigarrow \ell(w) = r$ heißt die *Länge* von $w$
- $\mathbb{Z}[t]$ Polynomring in der Variablen $t$ über $\mathbb{Z}$
- setze

$$\mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[t] \cdot T_w$$

freier $\mathbb{Z}[t]$-Modul mit Basis $(T_w)_{w \in W}$

## Satz

Auf $\mathcal{H}(W, S)$ gibt es genau eine assoziative $\mathbb{Z}[t]$-Algebrenstruktur mit

$$T_w T_{w'} = \begin{cases} T_{ww'} & \text{falls} \quad \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ (t-1) T_w + t & \text{falls} \quad w = w' \in S. \end{cases}$$

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal $\rightsquigarrow \ell(w) = r$ heißt die *Länge* von $w$
- $\mathbb{Z}[t]$ Polynomring in der Variablen $t$ über $\mathbb{Z}$
- setze

$$\mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[t] \cdot T_w$$

freier $\mathbb{Z}[t]$-Modul mit Basis $(T_w)_{w \in W}$

## Satz

Auf $\mathcal{H}(W, S)$ gibt es genau eine assoziative $\mathbb{Z}[t]$-Algebrenstruktur mit

$$T_w T_{w'} = \begin{cases} T_{ww'} & \text{falls} \quad \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ (t-1) T_w + t & \text{falls} \quad w = w' \in S. \end{cases}$$

- $\mathcal{H}(W, S)$ heißt die *Iwahori-Hecke-Algebra* von $(W, S)$

- $(W, S)$ Coxetersystem
- schreibe $w \in W$ als $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ und $r$ minimal
  $\rightsquigarrow \ell(w) = r$ heißt die *Länge* von $w$
- $\mathbb{Z}[t]$ Polynomring in der Variablen $t$ über $\mathbb{Z}$
- setze

$$\mathcal{H}(W, S) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[t] \cdot T_w$$

freier $\mathbb{Z}[t]$-Modul mit Basis $(T_w)_{w \in W}$

## Satz

Auf $\mathcal{H}(W, S)$ gibt es genau eine assoziative $\mathbb{Z}[t]$-Algebrenstruktur mit

$$T_w T_{w'} = \begin{cases} T_{ww'} & \text{falls} \quad \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ (t-1) T_w + t & \text{falls} \quad w = w' \in S. \end{cases}$$

- $\mathcal{H}(W, S)$ heißt die *Iwahori-Hecke-Algebra* von $(W, S)$
- Multiplikation bestimmt durch Kombinatorik von $(W, S)$

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

$\rightsquigarrow$ Heckealgebra $\mathbb{Z}[B \backslash G / B]$ besitzt $\mathbb{Z}$-Basis $(BwB)_{w \in W}$

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

$\rightsquigarrow$ Heckealgebra $\mathbb{Z}[B \backslash G / B]$ besitzt $\mathbb{Z}$-Basis $(BwB)_{w \in W}$
$\rightsquigarrow$ Ringstruktur leitet sich aus Gruppenstruktur von $W$ ab

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

$\rightsquigarrow$ Heckealgebra $\mathbb{Z}[B\backslash G/B]$ besitzt $\mathbb{Z}$-Basis $(BwB)_{w \in W}$
$\rightsquigarrow$ Ringstruktur leitet sich aus Gruppenstruktur von $W$ ab:

$$\mathcal{H}(W,S)/(t-q) \cong \mathbb{Z}[B\backslash G/B] \quad \text{via} \quad (f(t) \cdot T_w)_{w \in W} \mapsto (f(q) \cdot BwB)_{w \in W}$$

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

$\rightsquigarrow$ Heckealgebra $\mathbb{Z}[B\backslash G/B]$ besitzt $\mathbb{Z}$-Basis $(BwB)_{w \in W}$
$\rightsquigarrow$ Ringstruktur leitet sich aus Gruppenstruktur von $W$ ab:

$$\mathcal{H}(W,S)/(t-q) \cong \mathbb{Z}[B\backslash G/B] \quad \text{via} \quad (f(t) \cdot T_w)_{w \in W} \mapsto (f(q) \cdot BwB)_{w \in W}$$

- gilt allgemeiner für sogenannte "Gruppen mit $BN$-Paar"

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

$\rightsquigarrow$ Heckealgebra $\mathbb{Z}[B\backslash G/B]$ besitzt $\mathbb{Z}$-Basis $(BwB)_{w \in W}$
$\rightsquigarrow$ Ringstruktur leitet sich aus Gruppenstruktur von $W$ ab:

$$\mathcal{H}(W,S)/(t-q) \cong \mathbb{Z}[B\backslash G/B] \quad \text{via} \quad (f(t) \cdot T_w)_{w \in W} \mapsto (f(q) \cdot BwB)_{w \in W}$$

- gilt allgemeiner für sogenannte "Gruppen mit $BN$-Paar"
- affine Spiegelungsgruppen treten über $p$-adischen Körpern auf, z.B. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ über endlichem Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q$ Elementen
- $W = S_n \hookrightarrow G$ über Permutationsmatrizen: $\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$
- $B \subseteq G$ Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen

## Bruhat-Zerlegung (Gauss-Algorithmus)

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB$$

$\rightsquigarrow$ Heckealgebra $\mathbb{Z}[B\backslash G/B]$ besitzt $\mathbb{Z}$-Basis $(BwB)_{w \in W}$
$\rightsquigarrow$ Ringstruktur leitet sich aus Gruppenstruktur von $W$ ab:

$$\mathcal{H}(W,S)/(t-q) \cong \mathbb{Z}[B\backslash G/B] \quad \text{via} \quad (f(t) \cdot T_w)_{w \in W} \mapsto (f(q) \cdot BwB)_{w \in W}$$

- gilt allgemeiner für sogenannte "Gruppen mit $BN$-Paar"
- affine Spiegelungsgruppen treten über $p$-adischen Körpern auf, z.B. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$
- enge Verknüpfung zur Theorie der Gebäude (Bruhat & Tits)

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) $|x + y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ (*starke Dreiecksungleichung*).

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) $|x + y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ (*starke Dreiecksungleichung*).

## Definition

$\mathbb{Q}_p$ = Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) $|x + y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ (*starke Dreiecksungleichung*).

## Definition

$\mathbb{Q}_p$ = Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ heißt *Körper der p-adischen Zahlen*

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) $|x + y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ (*starke Dreiecksungleichung*).

## Definition

$\mathbb{Q}_p$ = Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ heißt *Körper der p-adischen Zahlen*

- $\mathbb{Q}_p$ ist lokal kompakter topologischer Körper

# Die $p$-adischen Zahlen

- fixiere Primzahl $p$
- für $x \in \mathbb{Q}^*$ sei $x = \pm \prod_q q^{n_q}$ mit $n_q \in \mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung von $x$
- für $x \in \mathbb{Q}$ setze

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-n_p}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der $p$-adische Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ erfüllt

(i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) $|x + y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ (*starke Dreiecksungleichung*).

## Definition

$\mathbb{Q}_p$ = Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ heißt *Körper der p-adischen Zahlen*

- $\mathbb{Q}_p$ ist lokal kompakter topologischer Körper
- steht in der Zahlentheorie gleichberechtigt neben $\mathbb{R}$

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

*Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\supseteq} & B(\mathbb{F}_p) = B \quad \text{obere Dreiecksmatrizen} \end{array}$$

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

*Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\supseteq} & B(\mathbb{F}_p) = B \quad \text{obere Dreiecksmatrizen} \end{array}$$

## Iwahori-Hecke-Algebren

- $I = \pi^{-1}(B)$ heißt *Iwahori-Untergruppe* von $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

*Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\supseteq} & B(\mathbb{F}_p) = B \quad \text{obere Dreiecksmatrizen} \end{array}$$

## Iwahori-Hecke-Algebren

- $I = \pi^{-1}(B)$ heißt *Iwahori-Untergruppe* von $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$
- nach Nagayoshi Iwahori (1927–2011)

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

*Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\supseteq} & B(\mathbb{F}_p) = B \quad \text{obere Dreiecksmatrizen} \end{array}$$

## Iwahori-Hecke-Algebren

- $I = \pi^{-1}(B)$ heißt *Iwahori-Untergruppe* von $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$
- nach Nagayoshi Iwahori (1927–2011)
- Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{Z}[I\backslash G/I]$

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

*Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\supseteq} & B(\mathbb{F}_p) = B \quad \text{obere Dreiecksmatrizen} \end{array}$$

## Iwahori-Hecke-Algebren

- $I = \pi^{-1}(B)$ heißt *Iwahori-Untergruppe* von $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$
- nach Nagayoshi Iwahori (1927–2011)
- Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{Z}[I\backslash G/I] \cong \mathcal{H}(W,S)/(t-p)$ für geeignetes $(W,S)$

- $|\cdot|_p$ setzt sich zu Absolutbetrag $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ fort
- $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leqslant 1\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit $p$ Elementen

*Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\supseteq} & B(\mathbb{F}_p) = B \end{array}$$

obere Dreiecksmatrizen

## Iwahori-Hecke-Algebren

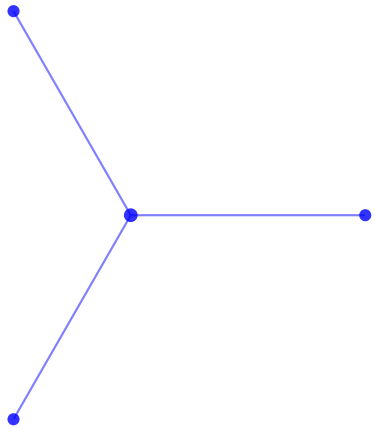
- $I = \pi^{-1}(B)$ heißt *Iwahori-Untergruppe* von $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$
- nach Nagayoshi Iwahori (1927–2011)
- Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{Z}[I\backslash G/I] \cong \mathcal{H}(W,S)/(t-p)$ für geeignetes $(W,S)$

N. Iwahori, H. Matsumoto: On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $p$-adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES **25**, 5–48, (1965)

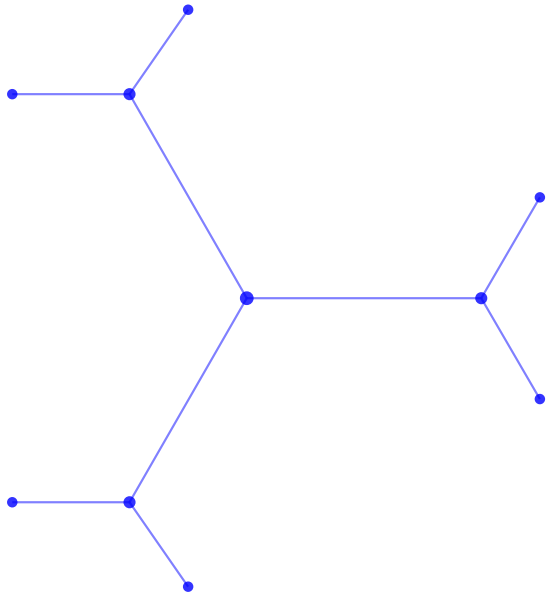
## Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$

## Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$

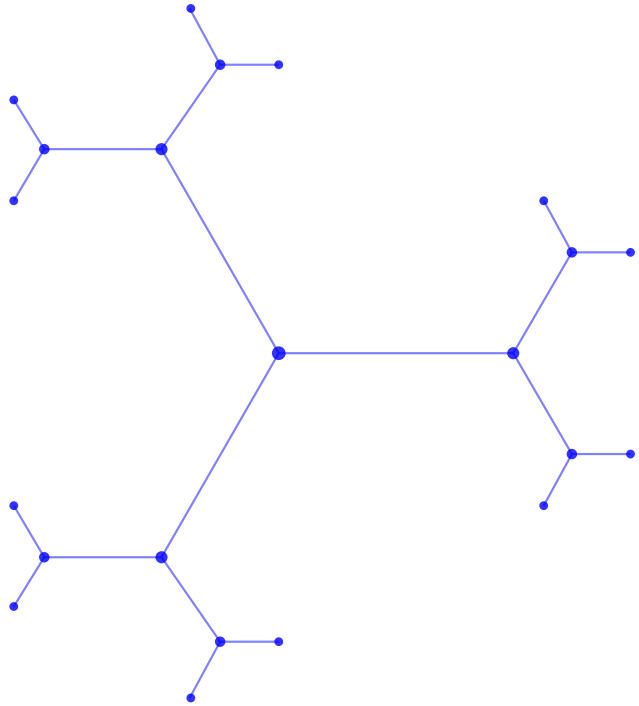
## Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



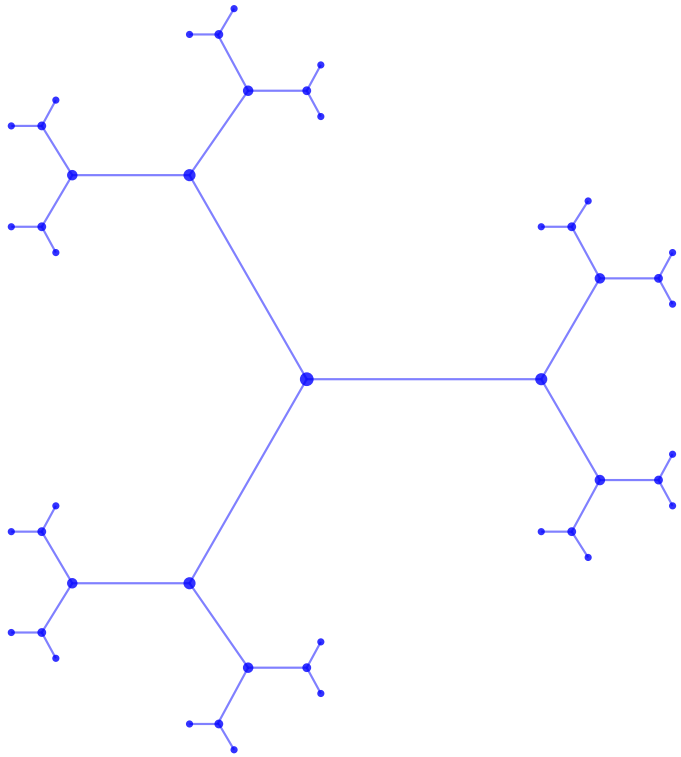
# Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



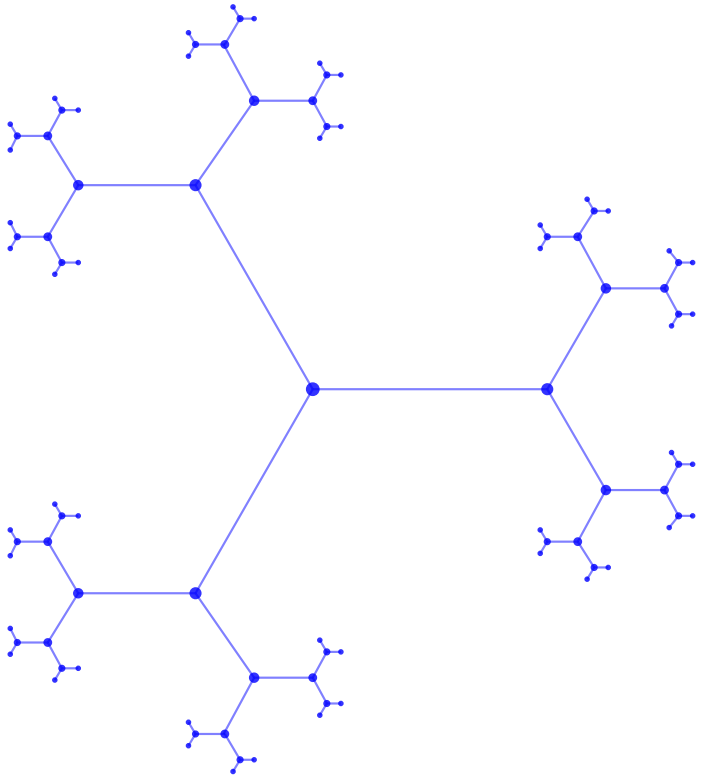
# Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



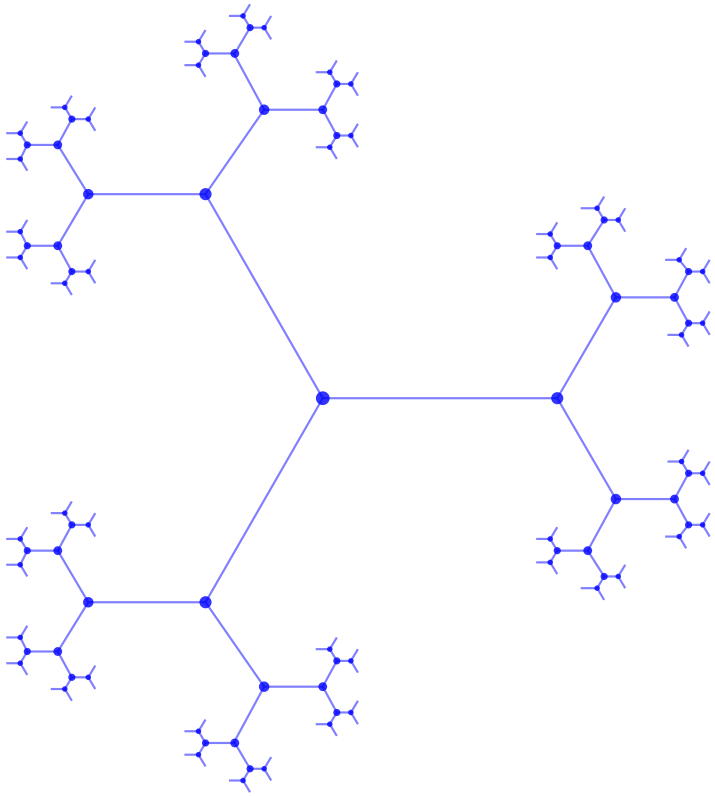
# Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



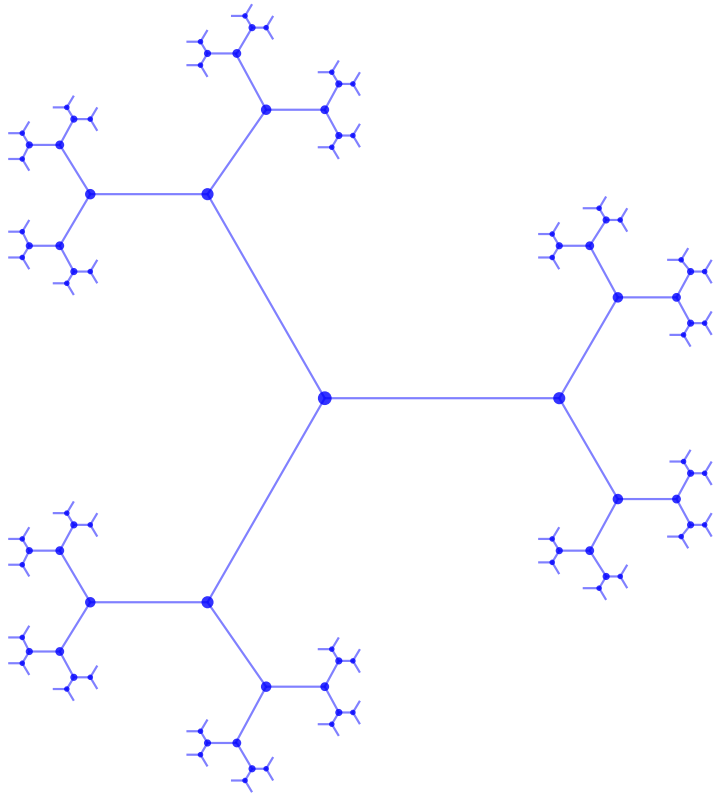
# Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



# Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$

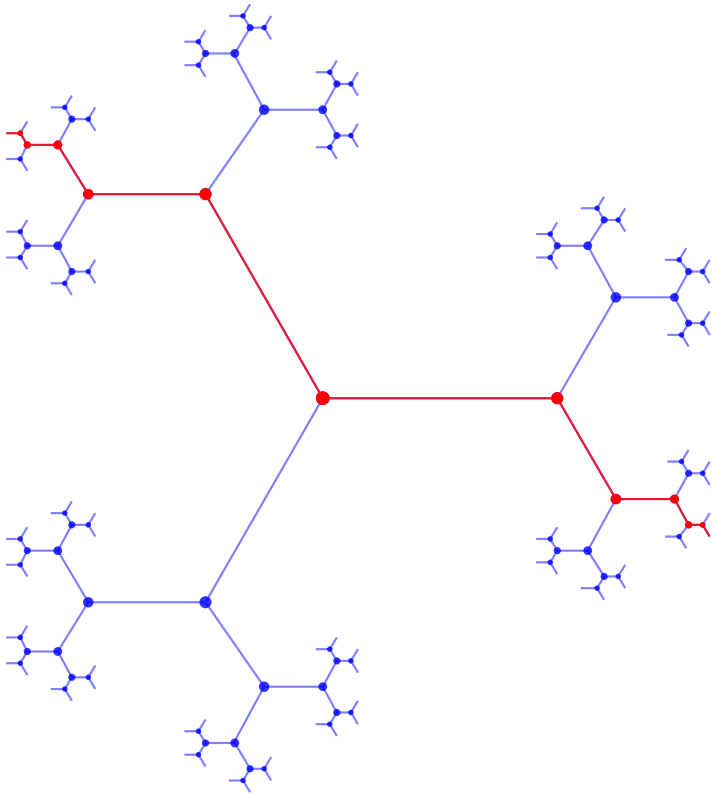


## Bruhat-Tits-Gebäude von $SL_2(\mathbb{Q}_2)$



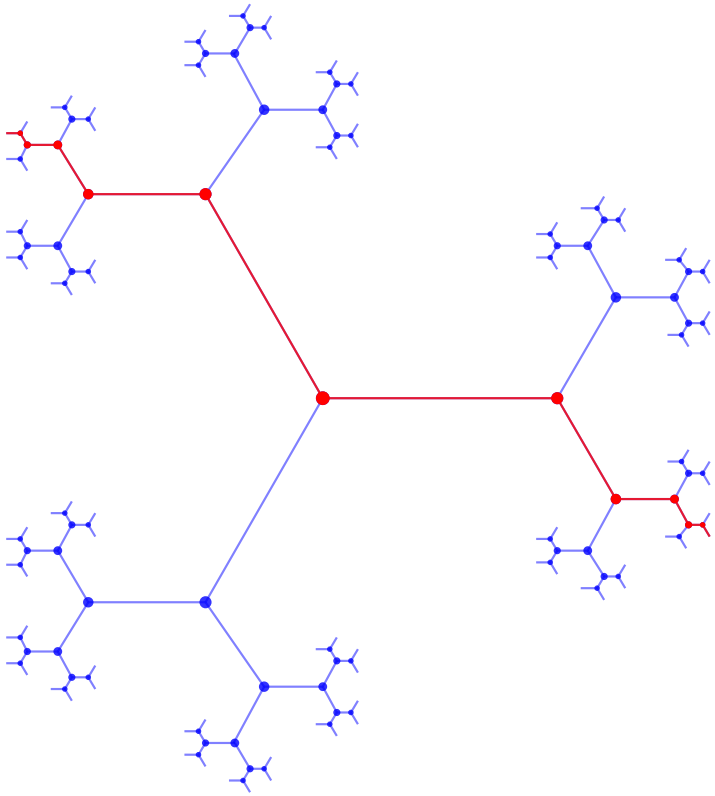
- 3-regulärer zusammenhängender Graph ohne Zyklen

## Bruhat-Tits-Gebäude von $SL_2(\mathbb{Q}_2)$



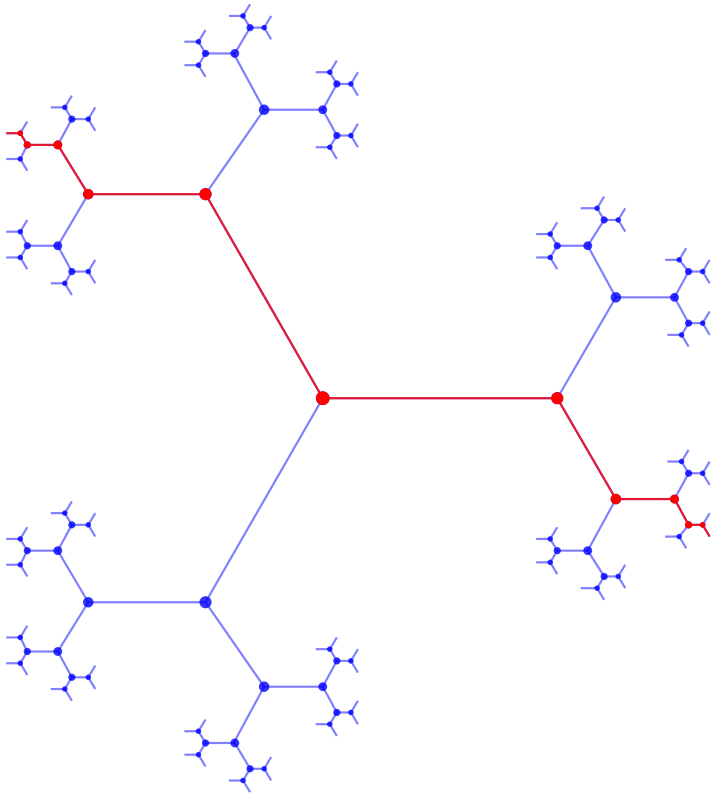
- 3-regulärer zusammenhängender Graph ohne Zyklen

## Bruhat-Tits-Gebäude von $SL_2(\mathbb{Q}_2)$



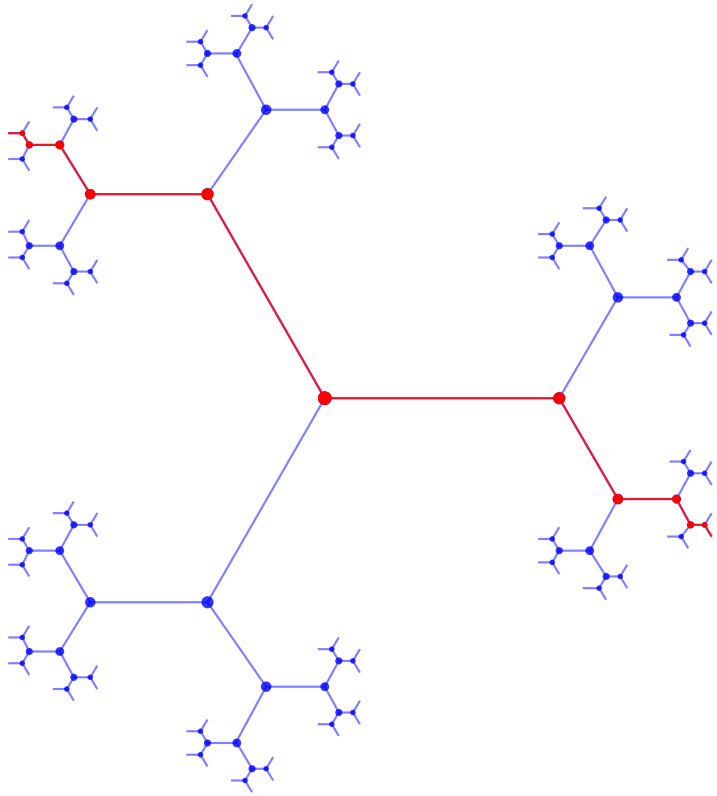
- 3-regulärer zusammenhängender Graph ohne Zyklen
- Vereinigung affiner reeller Geraden mit Facettenstruktur (*Simplizialkomplex*)

## Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



- 3-regulärer zusammenhängender Graph ohne Zyklen
- Vereinigung affiner reeller Geraden mit Facettenstruktur (*Simplizialkomplex*)
- trägt Operation von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$

## Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$



- 3-regulärer zusammenhängender Graph ohne Zyklen
- Vereinigung affiner reeller Geraden mit Facettenstruktur (*Simplizialkomplex*)
- trägt Operation von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$
- erlaubt Analyse der Gruppenstruktur von $G$ (Doppelnebenklassen etc.)

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

**analytische Invarianten**

*lineare Gruppen über $K$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

**analytische Invarianten**

*lineare Gruppen über $K$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

$\longleftrightarrow$

**arithmetische Invarianten**

*die Galoisgruppe $Gal(\overline{K}|K)$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

**analytische Invarianten**

*lineare Gruppen über $K$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

$\longleftrightarrow$

**arithmetische Invarianten**

*die Galoisgruppe $Gal(\overline{K}|K)$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

- Verallgemeinerung des Modularitätsproblems für elliptische Kurven

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

**analytische Invarianten**

*lineare Gruppen über $K$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

$\longleftrightarrow$

**arithmetische Invarianten**

*die Galoisgruppe $Gal(\overline{K}|K)$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

- Verallgemeinerung des Modularitätsproblems für elliptische Kurven
- eindimensionale Darstellungen: Klassenkörpertheorie (Hasse, Artin, Tate)

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

**analytische Invarianten**

*lineare Gruppen über $K$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

$\longleftrightarrow$

**arithmetische Invarianten**

*die Galoisgruppe $Gal(\overline{K}|K)$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

- Verallgemeinerung des Modularitätsproblems für elliptische Kurven
- eindimensionale Darstellungen: Klassenkörpertheorie (Hasse, Artin, Tate)
- $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$: Langlands (um 1970)

# IV. Anwendungen – Zurück zur Zahlentheorie!

*Die Philosophie von Robert Langlands*

$K =$ globaler Körper, z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p(t)$,
oder lokaler Körper, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

**analytische Invarianten**

*lineare Gruppen über $K$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

$\longleftrightarrow$

**arithmetische Invarianten**

*die Galoisgruppe $Gal(\overline{K}|K)$*,
verwandte Gruppen und ihre Darstellungen

- Verallgemeinerung des Modularitätsproblems für elliptische Kurven
- eindimensionale Darstellungen: Klassenkörpertheorie (Hasse, Artin, Tate)
- $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$: Langlands (um 1970)
- zentrales Forschungsgebiet der Zahlentheorie und arithmetischen Geometrie

## *klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

## *klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$

## *klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$

- erzeugt durch $V^I$

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$

- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$

- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$

- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$

- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$

- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^I$$

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$
- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$
- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^I$$

- ist eine Kategorienäquivalenz (A. Borel 1976)

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$
- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$
- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^I$$

- ist eine Kategorienäquivalenz (A. Borel 1976)
- Klassifikation der Heckemoduln durch Kazhdan & Lusztig: äquivariante $K$-Homologie von Flaggenvarietäten

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$
- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$
- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^I$$

- ist eine Kategorienäquivalenz (A. Borel 1976)
- Klassifikation der Heckemoduln durch Kazhdan & Lusztig: äquivariante $K$-Homologie von Flaggenvarietäten

  $\rightsquigarrow$ lokale Langlandskorrespondenz für obige Darstellungen

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$
- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$
- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^I$$

- ist eine Kategorienäquivalenz (A. Borel 1976)
- Klassifikation der Heckemoduln durch Kazhdan & Lusztig: äquivariante $K$-Homologie von Flaggenvarietäten

  $\rightsquigarrow$ lokale Langlandskorrespondenz für obige Darstellungen und Beweis der Kazhdan-Lusztig-Vermutung

*klassischer Fall:* Darstellungen mit komplexen Koeffizienten

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$ Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$
- erzeugt durch $V^I$
- $\dim_{\mathbb{C}}(V^I) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{C}[I\backslash G/I]$
- $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^I$$

- ist eine Kategorienäquivalenz (A. Borel 1976)
- Klassifikation der Heckemoduln durch Kazhdan & Lusztig: äquivariante $K$-Homologie von Flaggenvarietäten

  $\rightsquigarrow$ lokale Langlandskorrespondenz für obige Darstellungen und Beweis der Kazhdan-Lusztig-Vermutung

D. Kazhdan, G. Lusztig: Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, *Invent. Math.* **87**, 153–215, (1987)

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I$$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$

- erzeugt durch $V^{I_p}$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$

- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$
- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der pro-$p$-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{F}_p[I_p \backslash G / I_p]$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) < \infty$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$
- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der pro-$p$-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{F}_p[I_p \backslash G / I_p]$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^{I_p}$$

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$
- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der pro-$p$-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{F}_p[I_p \backslash G / I_p]$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^{I_p}$$

- Verhalten im Allgemeinen ungeklärt (Ollivier)

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$
- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der pro-$p$-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{F}_p[I_p \backslash G / I_p]$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^{I_p}$$

- Verhalten im Allgemeinen ungeklärt (Ollivier)
- Struktur der pro-$p$ Iwahori-Hecke-Algebra: Vignéras (2004)

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$
- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der pro-$p$-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{F}_p[I_p \backslash G / I_p]$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^{I_p}$$

- Verhalten im Allgemeinen ungeklärt (Ollivier)
- Struktur der pro-$p$ Iwahori-Hecke-Algebra: Vignéras (2004)
- Klassifikation der einfachen Heckemoduln für $\mathrm{GL}_n$: Ollivier (2010)

*neue Entwicklung:* Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supseteq I \supset I_p$ pro-p Iwahori-Untergruppe

Darstellungen $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(V)$
- erzeugt durch $V^{I_p}$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(V^{I_p}) < \infty$

$\longrightarrow$

Moduln $M$ über der pro-$p$-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathbb{F}_p[I_p \backslash G / I_p]$
- $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) < \infty$

$$V \longmapsto V^{I_p}$$

- Verhalten im Allgemeinen ungeklärt (Ollivier)
- Struktur der pro-$p$ Iwahori-Hecke-Algebra: Vignéras (2004)
- Klassifikation der einfachen Heckemoduln für $\mathrm{GL}_n$: Ollivier (2010)
- Heckemoduln & Galoisdarstellungen in Charakteristik $p$: funktorielle Beziehung via Bruhat-Tits-Gebäude; Große-Klönne (2013)

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n =$ symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n =$ symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i - j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad W$$

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad W$$

$$\left.\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{H}(W,S)$$

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} s_i s_j &=& s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &=& s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } W$$

$$\left.\begin{array}{rcl} T_i T_j &=& T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &=& T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } \mathcal{H}(W,S)$$

Zopfrelationen

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} s_i s_j &=& s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &=& s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } W$$

$$\left.\begin{array}{rcl} T_i T_j &=& T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &=& T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } \mathcal{H}(W,S)$$

Zopfrelationen

Zopfgruppe $B_n$

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} s_i s_j &=& s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &=& s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } W$$

$$\left.\begin{array}{rcl} T_i T_j &=& T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &=& T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } \mathcal{H}(W,S)$$

Zopfrelationen

Zopfgruppe $B_n$

*algebraisch:* Gruppe mit $n-1$ Erzeugern & Zopfrelationen

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} s_i s_j &=& s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &=& s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } W$$

$$\left.\begin{array}{rcl} T_i T_j &=& T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &=& T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } \mathcal{H}(W,S)$$

Zopfrelationen

Zopfgruppe $B_n$

*algebraisch:* Gruppe mit $n-1$ Erzeugern & Zopfrelationen
*topologisch:* Fundamentalgruppe eines $n$-Konfigurationsraums

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} s_i s_j &=& s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &=& s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } W$$

$$\left.\begin{array}{rcl} T_i T_j &=& T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &=& T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{array}\right\} \text{ in } \mathcal{H}(W,S)$$

Zopfrelationen

Zopfgruppe $B_n$

*algebraisch:* Gruppe mit $n-1$ Erzeugern & Zopfrelationen
*topologisch:* Fundamentalgruppe eines $n$-Konfigurationsraums,
Abbildungsklassengruppe der $n$-punktierten Kreisscheibe

# Weitere Anwendung – Knotentheorie

$W = S_n$ = symmetrische Gruppe mit Erzeugern $s_i = (i \;\; i+1) \in S$;
für $|i-j| > 1$ gilt

$$\left.\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{aligned}\right\} \text{ in } W$$

$$\left.\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \end{aligned}\right\} \text{ in } \mathcal{H}(W,S)$$

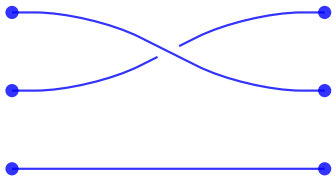
Zopfrelationen

**Zopfgruppe $B_n$**

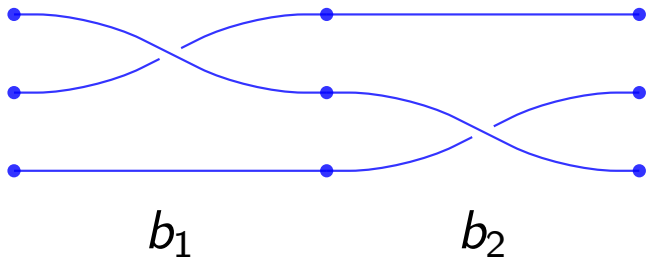
*algebraisch:* Gruppe mit $n-1$ Erzeugern & Zopfrelationen
*topologisch:* Fundamentalgruppe eines $n$-Konfigurationsraums,
Abbildungsklassengruppe der $n$-punktierten Kreisscheibe

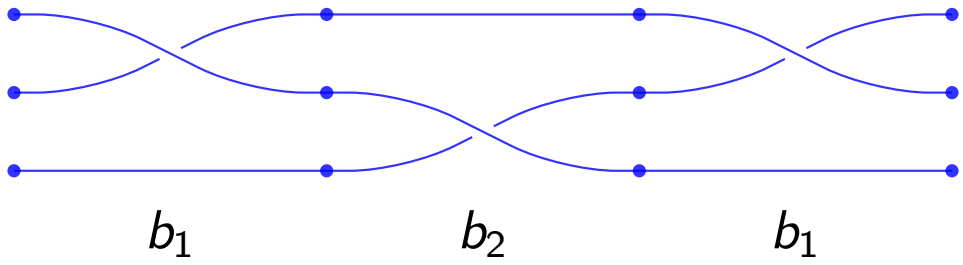
**erhalten Ringhomomorphismen**

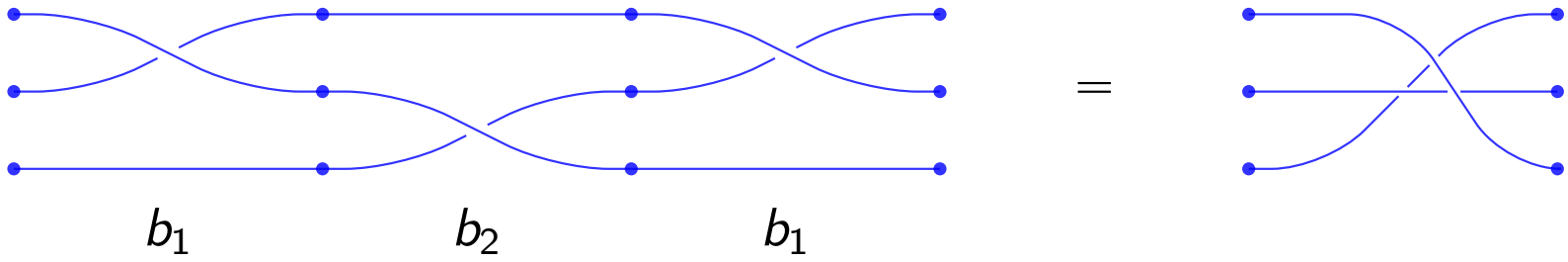
$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}][B_n] \twoheadrightarrow \mathcal{H}(W,S)[t^{-1}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[W]$$

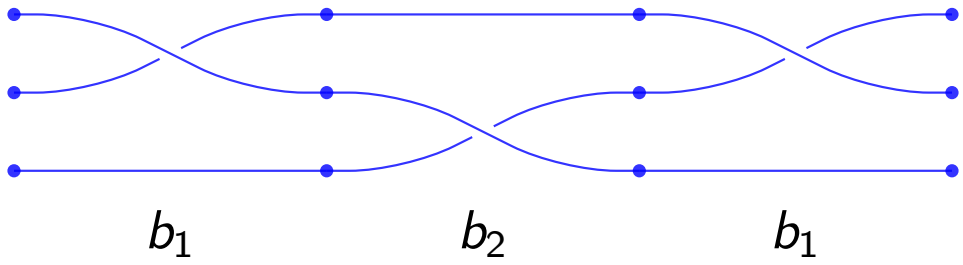


$b_1$

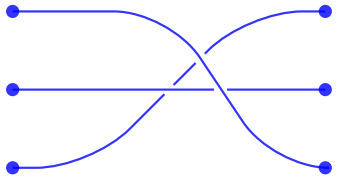

$b_1$
$b_2$

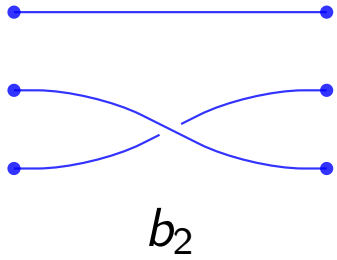

$b_1$
$b_2$
$b_1$

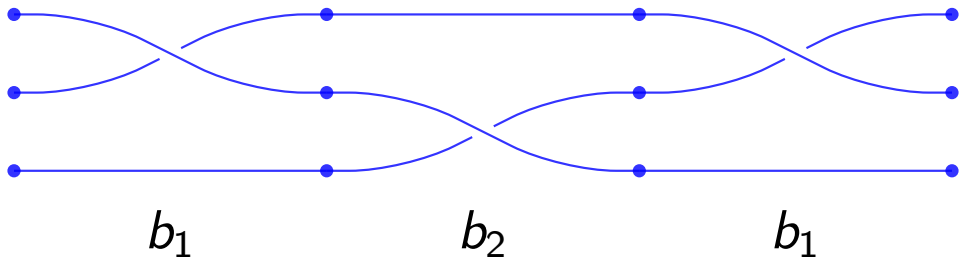

$b_1$
$b_2$
$b_1$
=


$b_1$
$b_2$
$b_1$

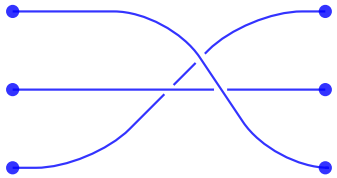
$=$

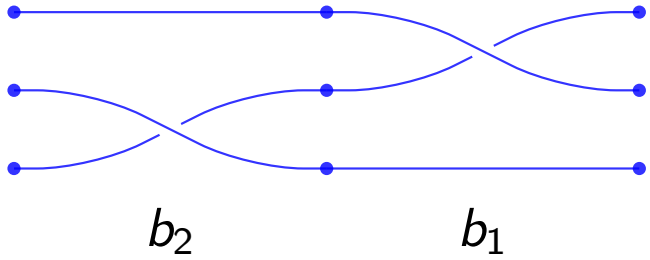


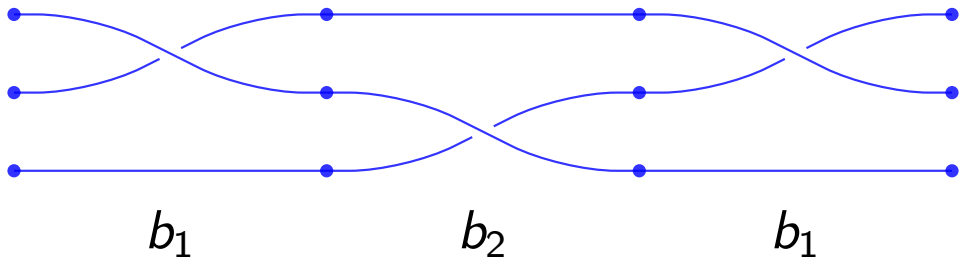

$b_2$


$b_1$
$b_2$
$b_1$

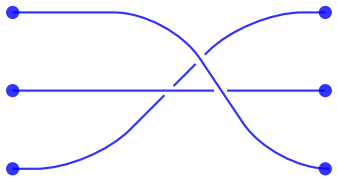
$=$

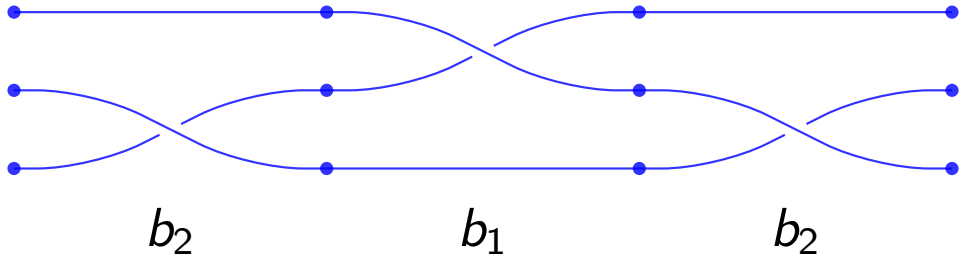


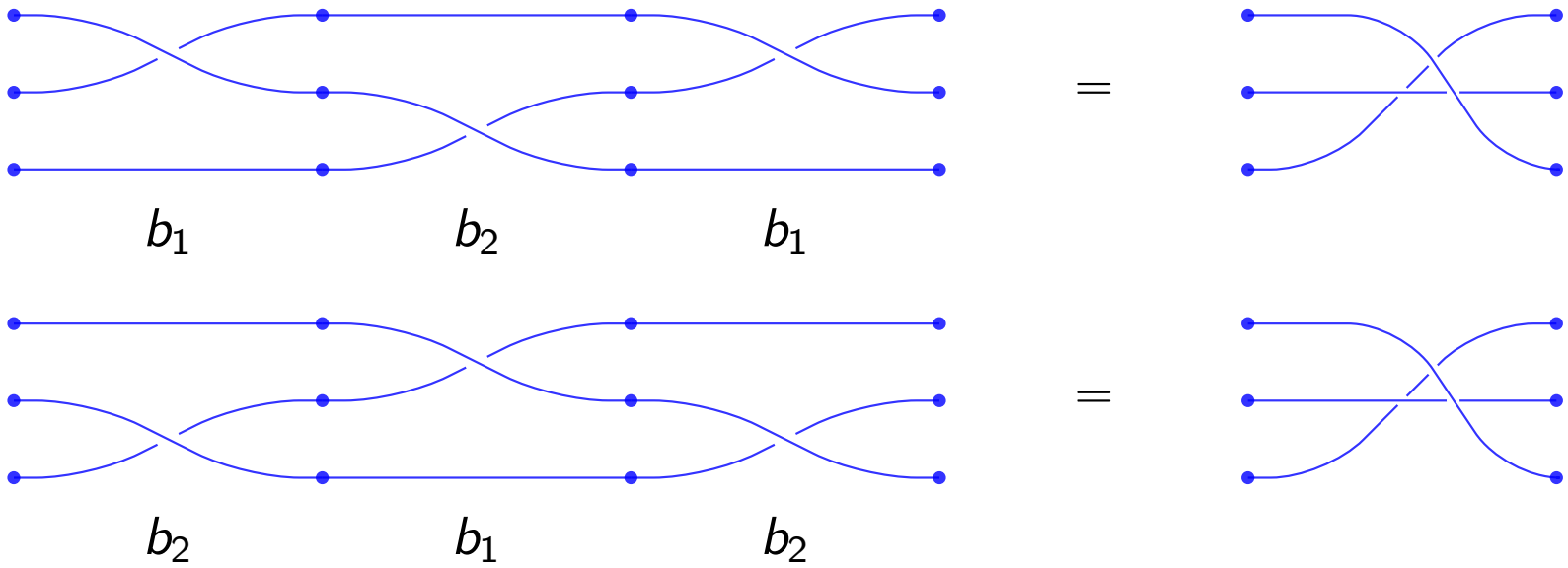

$b_2$
$b_1$

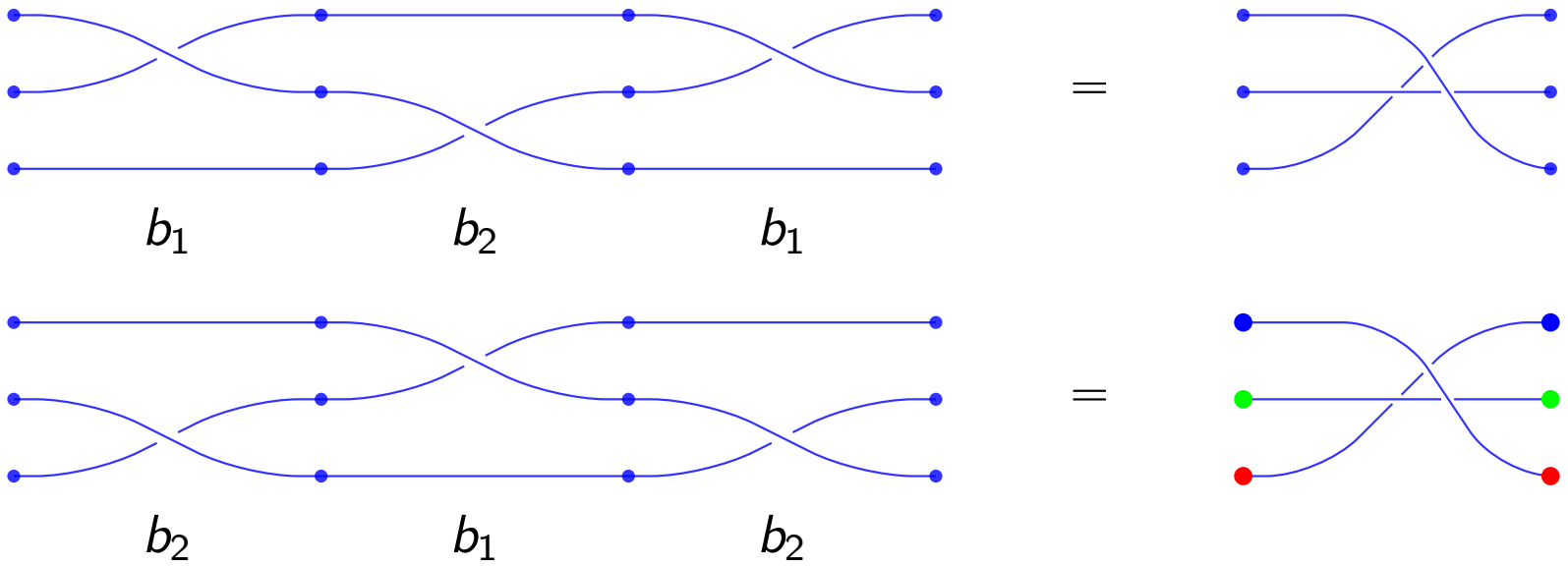

$b_1$
$b_2$
$b_1$

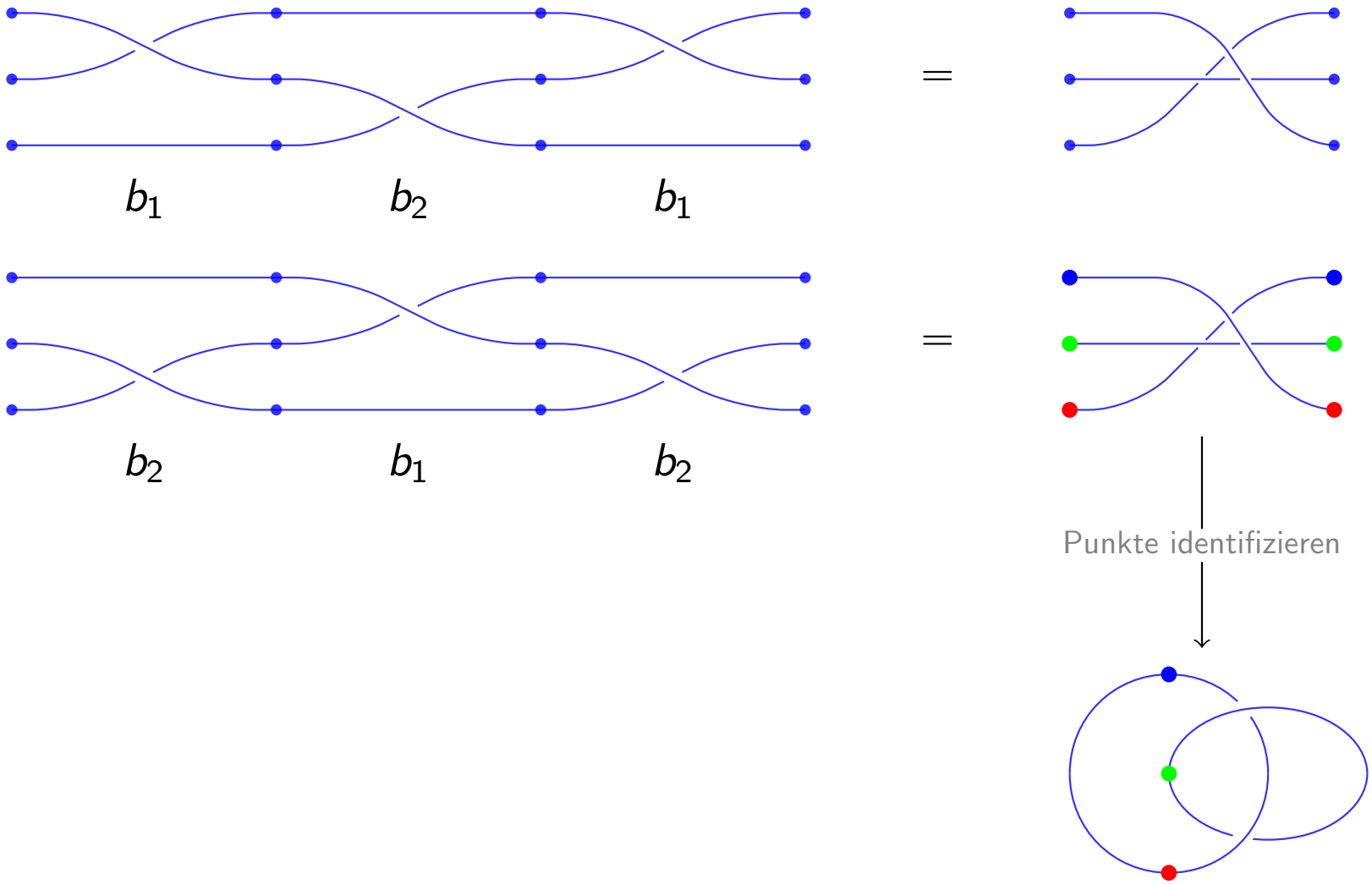
$=$

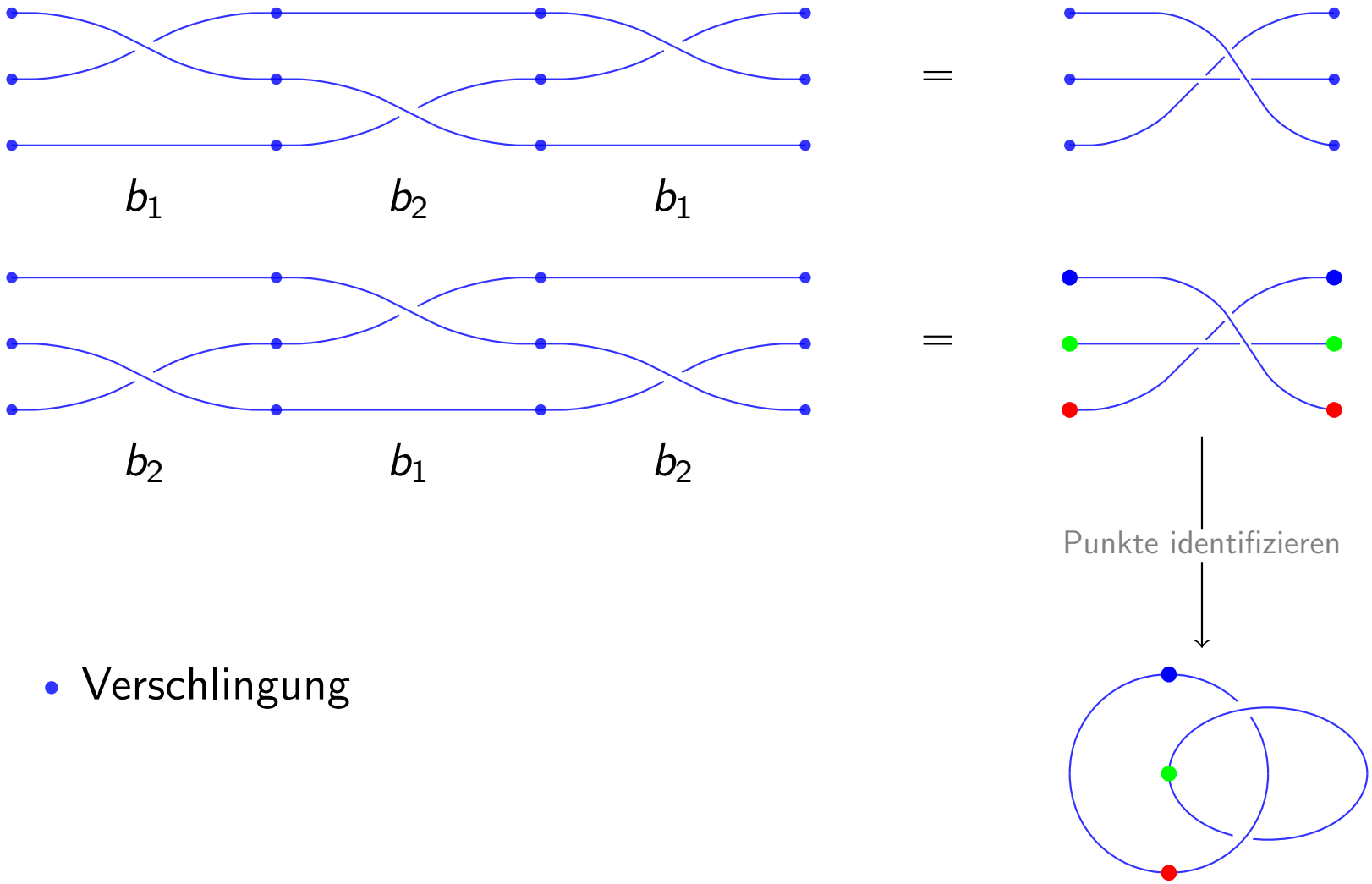



$b_2$
$b_1$
$b_2$

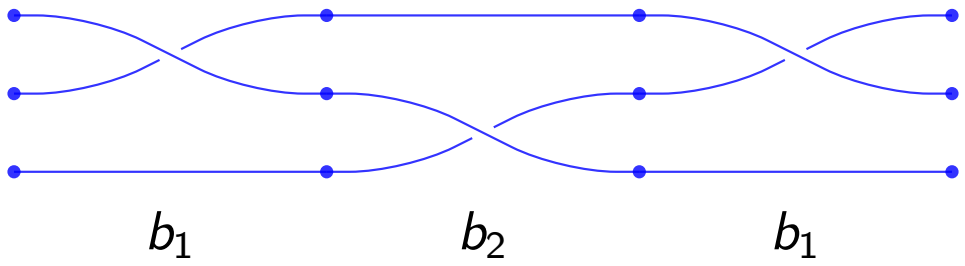

$b_1$
$b_2$
$b_1$
=
$b_2$
$b_1$
$b_2$
=


$b_1$
$b_2$
$b_1$
=
$b_2$
$b_1$
$b_2$
=

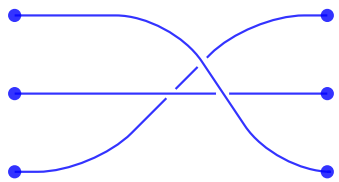

$b_1$
$b_2$
$b_1$
=
$b_2$
$b_1$
$b_2$
=
Punkte identifizieren

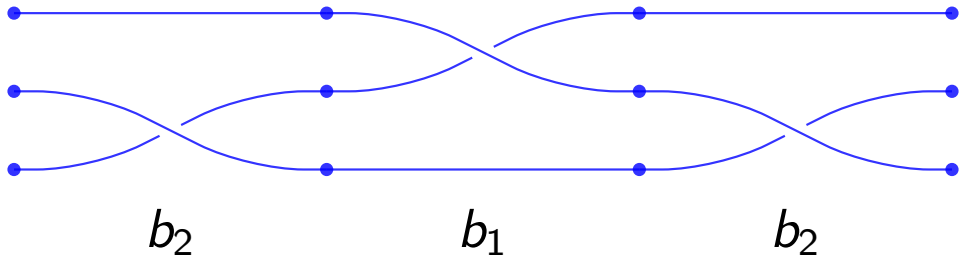



- Verschlingung

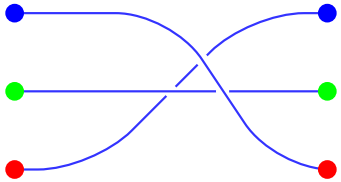



=

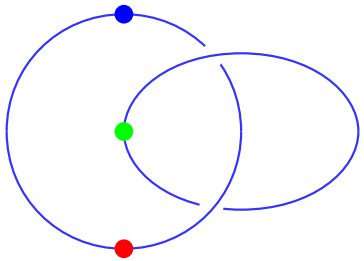




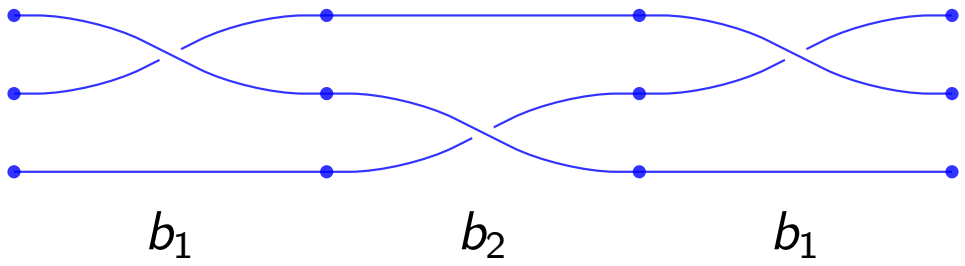

=



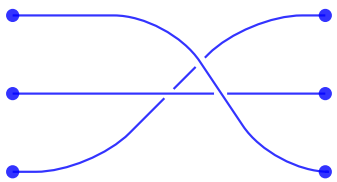
Punkte identifizieren

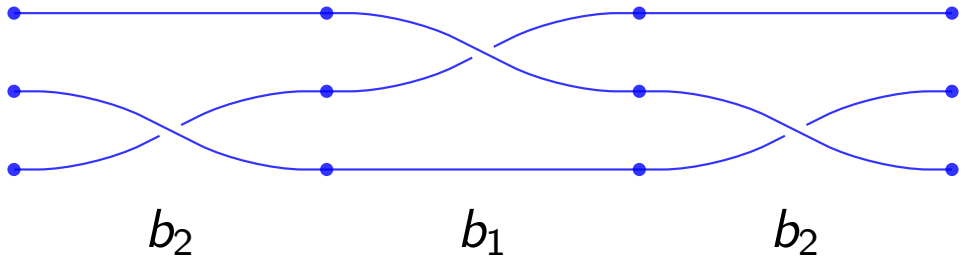


- Verschlingung
- manchmal Knoten (falls zusammenhängend)

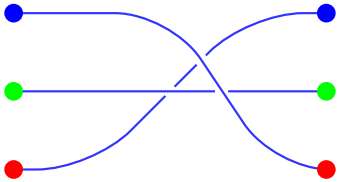



=

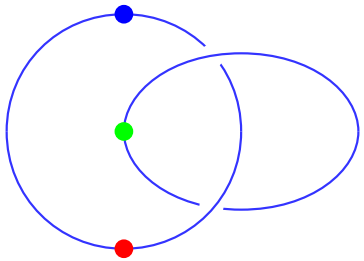




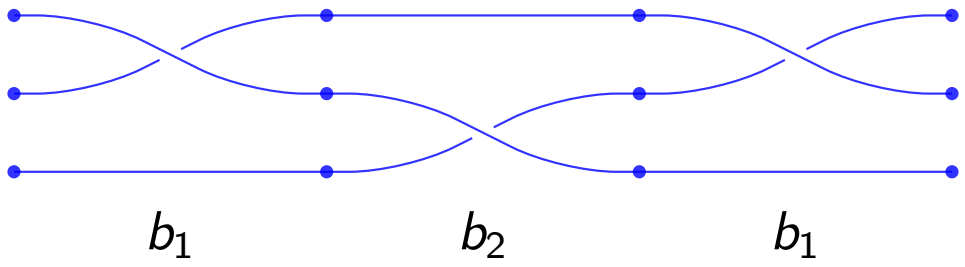

=



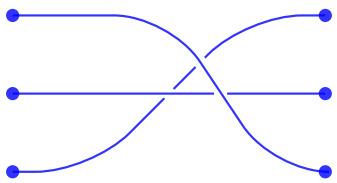
Punkte identifizieren

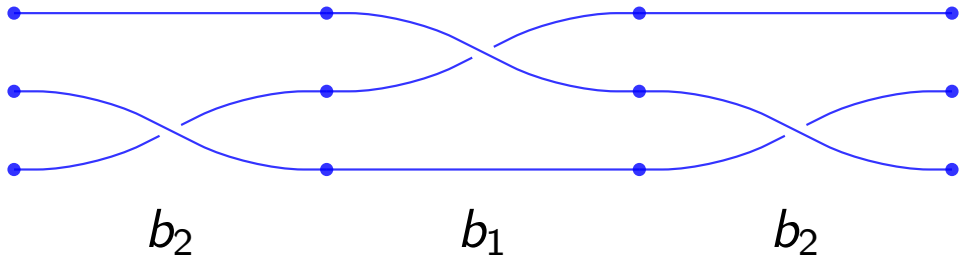


- Verschlingung
- manchmal Knoten (falls zusammenhängend)
- Iwahori-Hecke-Algebra $\rightsquigarrow$ Invariante

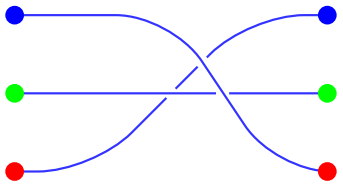



$=$

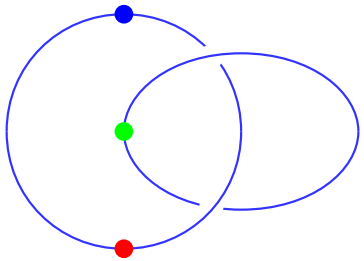





$=$



Punkte identifizieren



- Verschlingung
- manchmal Knoten (falls zusammenhängend)
- Iwahori-Hecke-Algebra $\rightsquigarrow$ Invariante

Jones-Conway-Polynom einer Verschlingung

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!