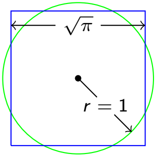
Die Quadratur des Kreises

Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Tag der offenen Tür



Inhalt des Vortrags

I. Die Redewendung – Presseschau

I. Die Redewendung – Presseschau

Magazin GQ (06/2012):

> *"Quadratur des Kreises – Coupé? Limousine? Diesel? Das BMW 6er Gran Coupé bringt das alles unter sein geschwungenes Dach."*

I. Die Redewendung – Presseschau

Magazin GQ (06/2012):

> *"Quadratur des Kreises – Coupé? Limousine? Diesel? Das BMW 6er Gran Coupé bringt das alles unter sein geschwungenes Dach."*

Börse Online (22.05.2014):

> *"Die Quadratur des Kreises als Fonds"*

I. Die Redewendung – Presseschau

Magazin GQ (06/2012):

> *"Quadratur des Kreises – Coupé? Limousine? Diesel? Das BMW 6er Gran Coupé bringt das alles unter sein geschwungenes Dach."*

Börse Online (22.05.2014):

> *"Die Quadratur des Kreises als Fonds"*

Stuttgarter Zeitung (09.05.2014):

> *"So absurd es klingt, aber man muss zwischen Hochwasser- und Flächenschutz die Quadratur des Kreises versuchen. Es gibt Ansätze dazu."*

I. Die Redewendung – Presseschau

Magazin GQ (06/2012):

> *"Quadratur des Kreises – Coupé? Limousine? Diesel? Das BMW 6er Gran Coupé bringt das alles unter sein geschwungenes Dach."*

Börse Online (22.05.2014):

> *"Die Quadratur des Kreises als Fonds"*

Stuttgarter Zeitung (09.05.2014):

> *"So absurd es klingt, aber man muss zwischen Hochwasser- und Flächenschutz die Quadratur des Kreises versuchen. Es gibt Ansätze dazu."*

Ostthüringer Zeitung (17.06.2014):

> *"Die Aufgabe, die Landrat Andreas Heller (CDU) in den kommenden Wochen zu lösen hat, kommt der Quadratur des Kreises gleich: Er muss nach der Kommunalwahl versuchen, eine stabile Mehrheit im Kreistag zu etablieren."*

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises (bildungssprachlich):

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises (bildungssprachlich):

- etwas Unmögliches, eine unlösbare Aufgabe;

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises (bildungssprachlich):

- etwas Unmögliches, eine unlösbare Aufgabe;
- nach der nicht lösbaren Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein zu einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises (bildungssprachlich):

- etwas Unmögliches, eine unlösbare Aufgabe;
- nach der nicht lösbaren Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein zu einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren

Frage:

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises (bildungssprachlich):

- etwas Unmögliches, eine unlösbare Aufgabe;
- nach der nicht lösbaren Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein zu einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren

Frage:

- Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?

Lexikalische Bedeutung

Duden (Redewendungen, 4. Auflage)

die Quadratur des Kreises (bildungssprachlich):

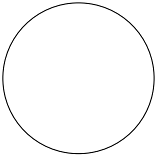
- etwas Unmögliches, eine unlösbare Aufgabe;
- nach der nicht lösbaren Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein zu einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren

Frage:

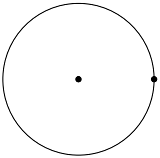
- Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?
- Warum ist die Quadratur des Kreises hiermit nicht möglich?

II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

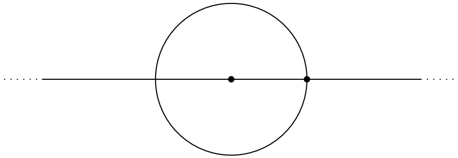
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

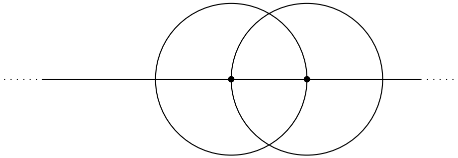


II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



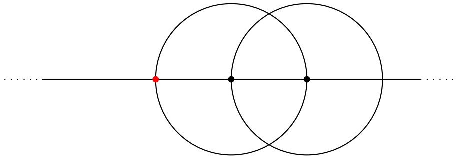
- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.

II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



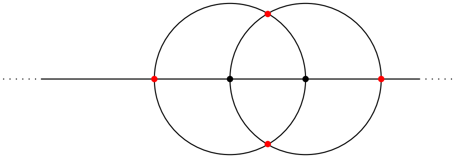
- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.

II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



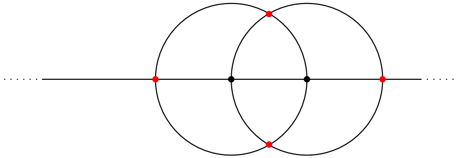
- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.

II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



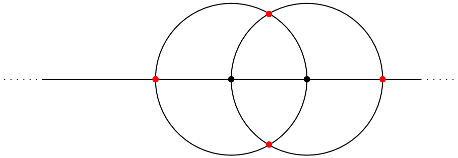
- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.

II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

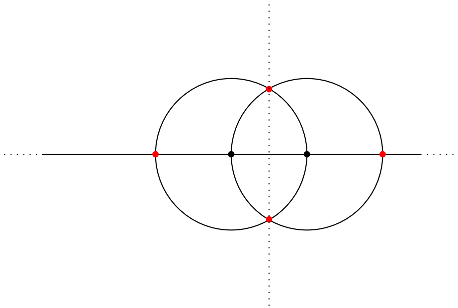
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

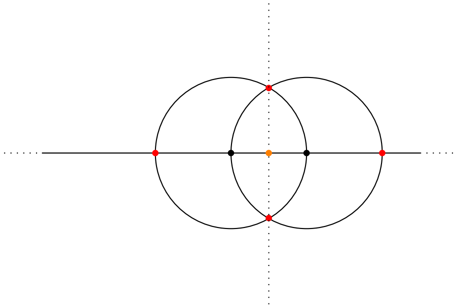
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

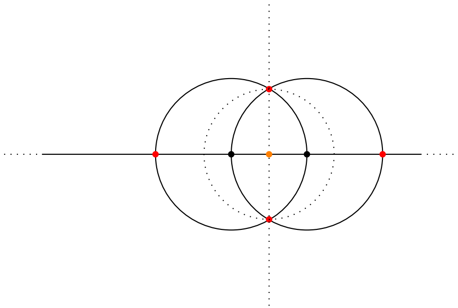
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

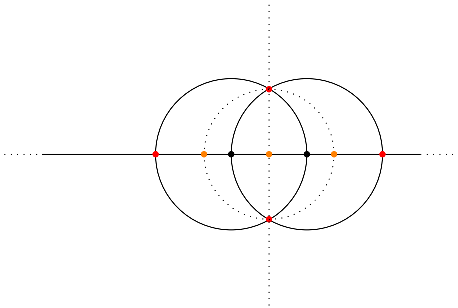
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

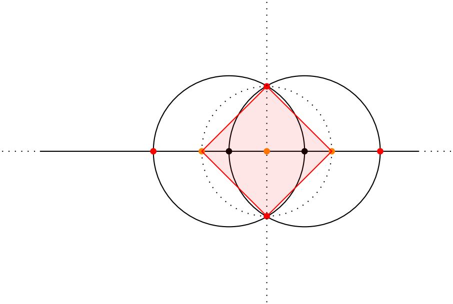
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

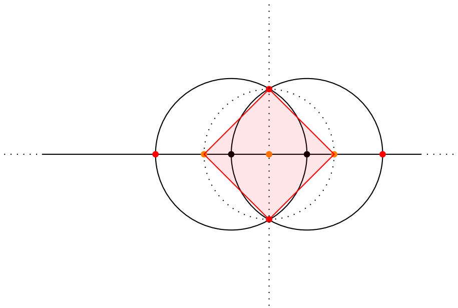
II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

II. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



- Durch zwei bekannte Punkte darf eine Gerade gezogen werden.
- Zwei bekannte Punkte dürfen für einen Zirkelschlag verwendet werden.
- Jeder entstehende Schnittpunkt heißt *mit Zirkel und Lineal konstruiert*.

Nun hat man mehr Punkte zur Verfügung und darf hiervon ausgehend neue Punkte konstruieren.

Zwar haben wir aus dem Kreis ein Quadrat konstruiert – sogar mit Zirkel und Lineal – es hat aber nicht denselben Flächeninhalt!

Beispiele möglicher Konstruktionen:

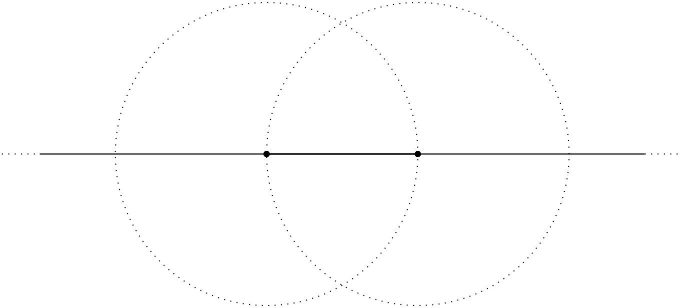
Mittelsenkrechte

Beispiele möglicher Konstruktionen:

Mittelsenkrechte

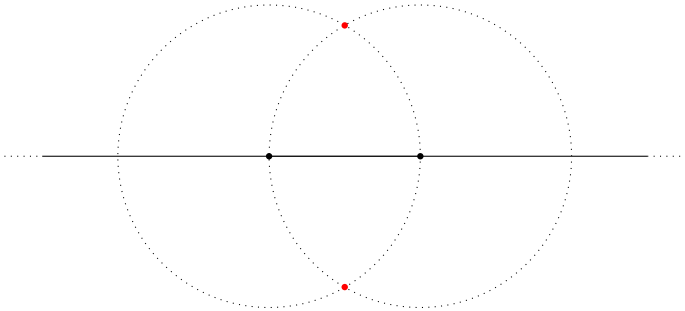
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Mittelsenkrechte



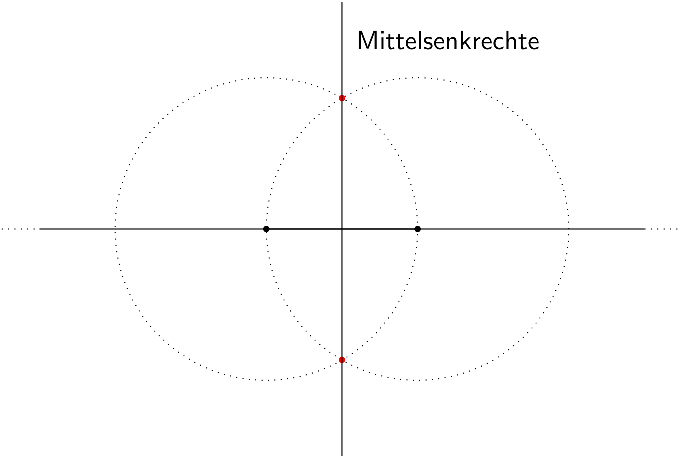
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Mittelsenkrechte



Beispiele möglicher Konstruktionen:

Mittelsenkrechte

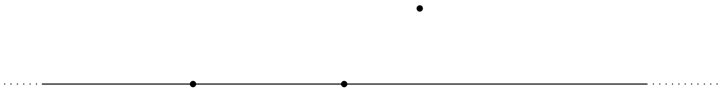


Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele

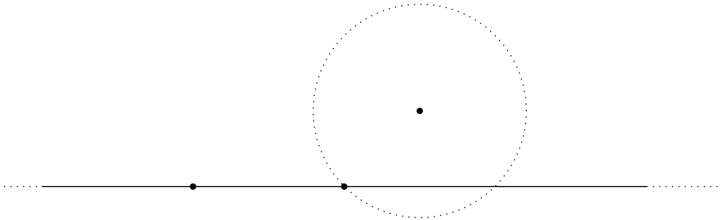
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



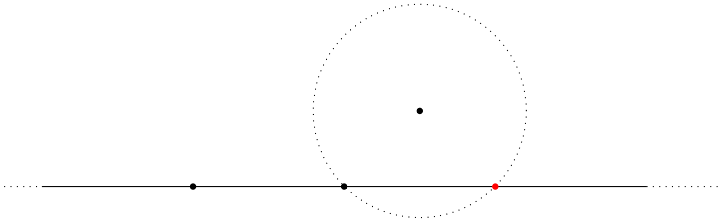
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



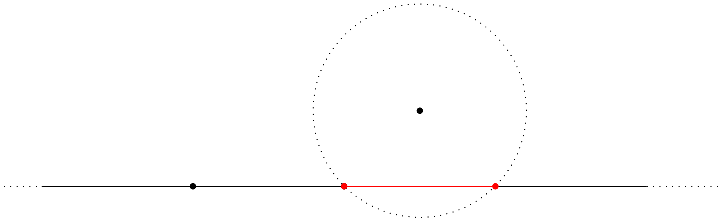
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



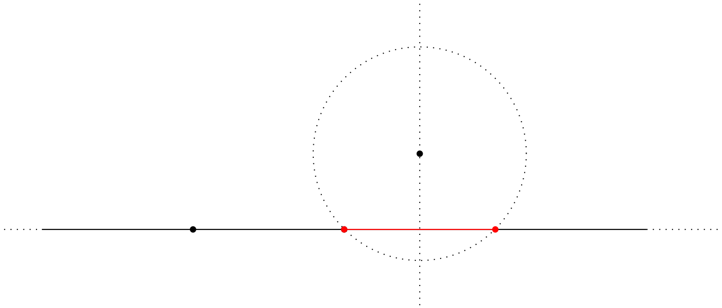
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



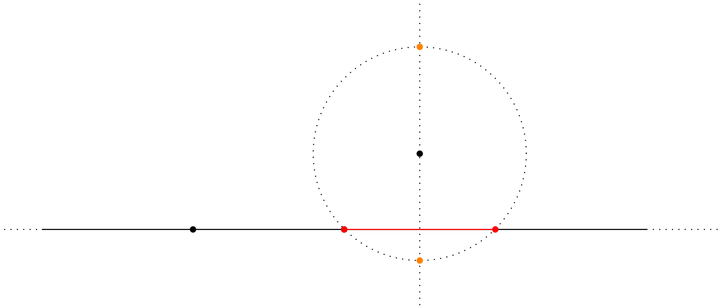
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



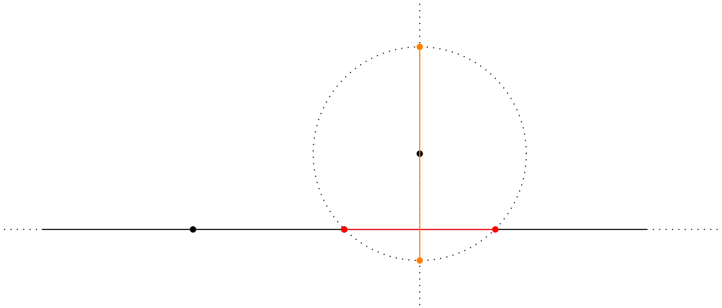
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



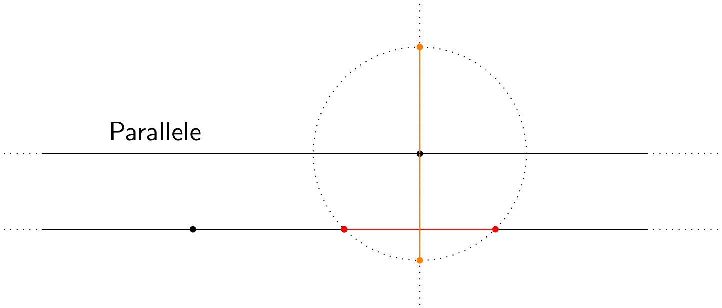
Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



Beispiele möglicher Konstruktionen:

Parallele



Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

Konstruktion natürlicher Streckenlängen

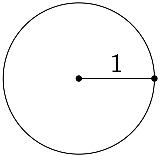
Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:

Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

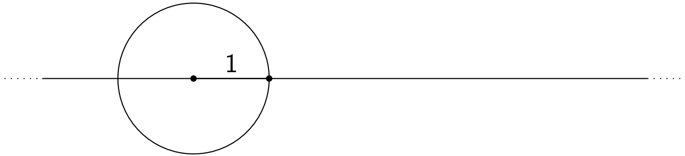
Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:



Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

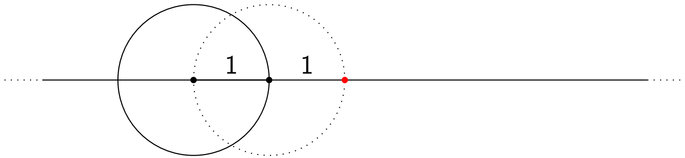
Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:



Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

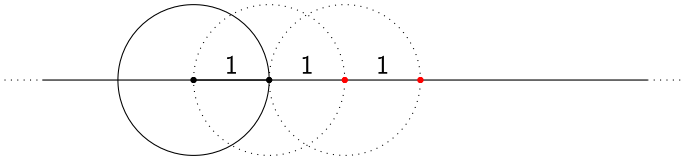
Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:



Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

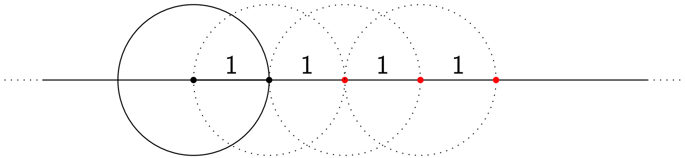
Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:



Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

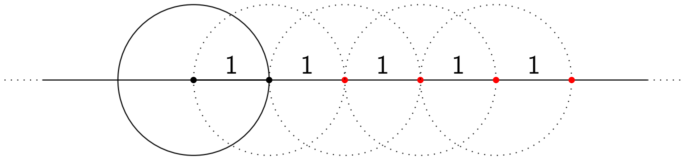
Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:



Konstruktion natürlicher Streckenlängen

Wir wählen den Maßstab so, dass unser Ausgangskreis den Radius 1 hat.

Wir können dann Strecken der Länge 1, 2, 3, 4, 5 . . . konstruieren, d.h. jede Strecke, deren Länge eine natürliche Zahl ist:

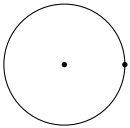


Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.

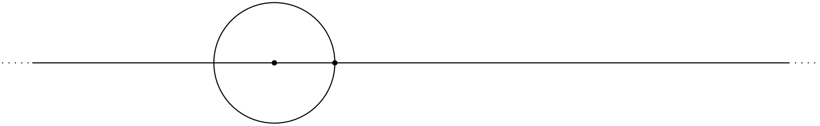
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



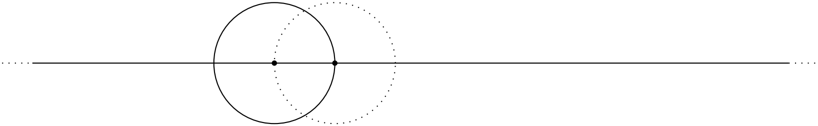
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



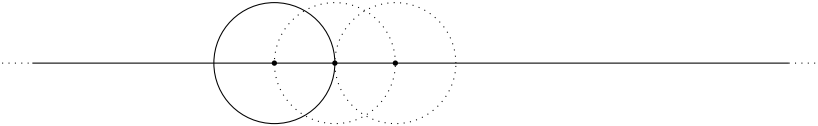
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



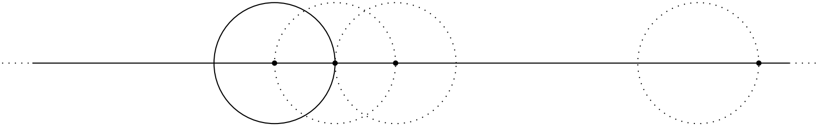
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



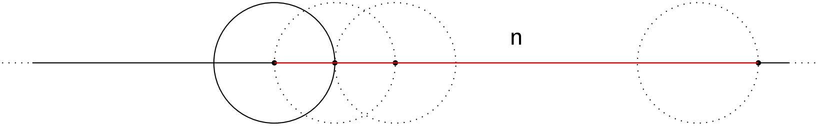
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



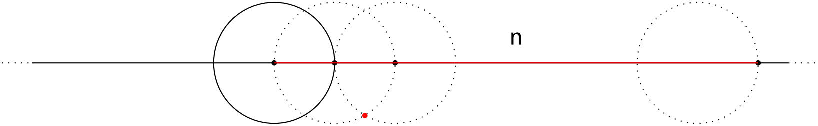
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



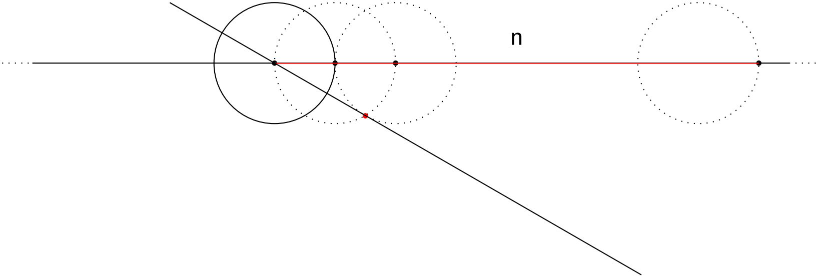
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



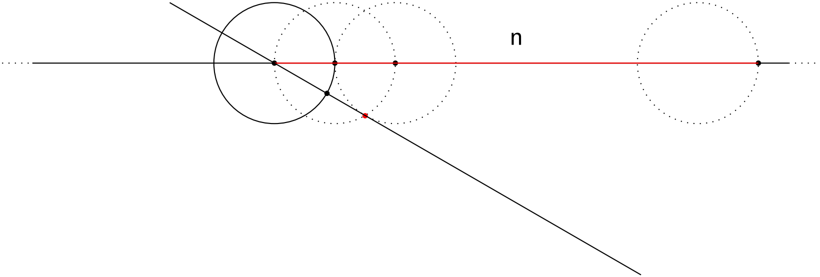
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



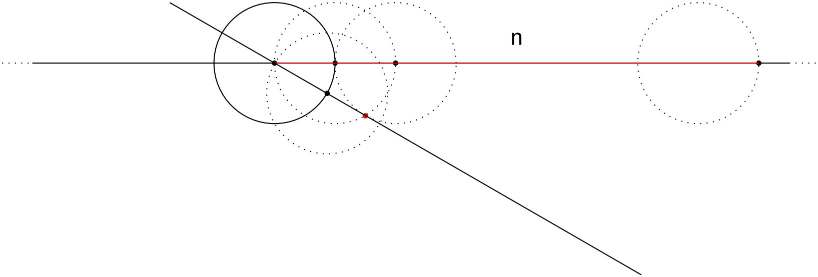
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



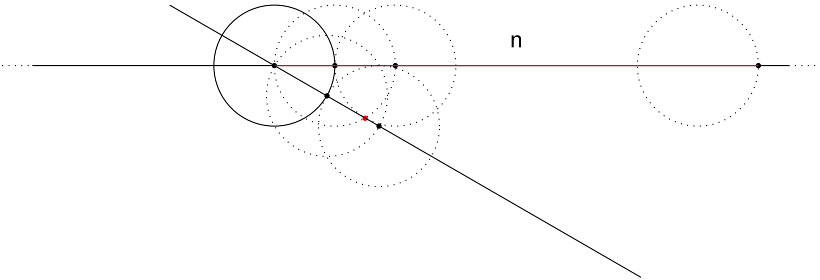
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



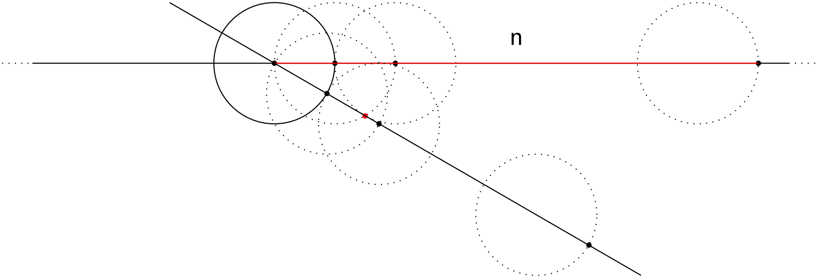
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



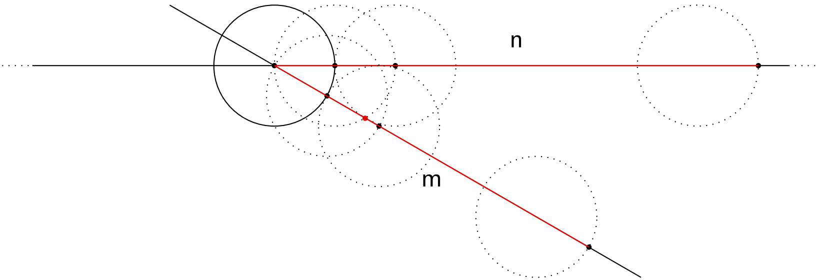
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



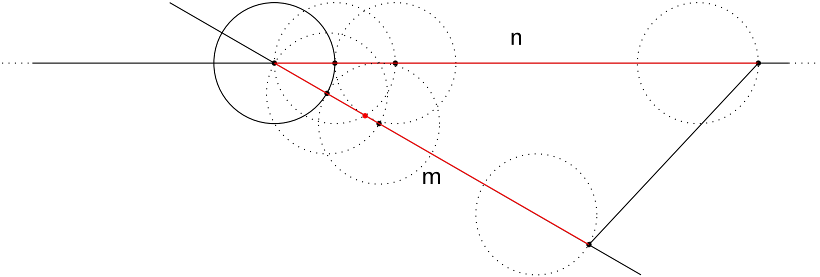
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



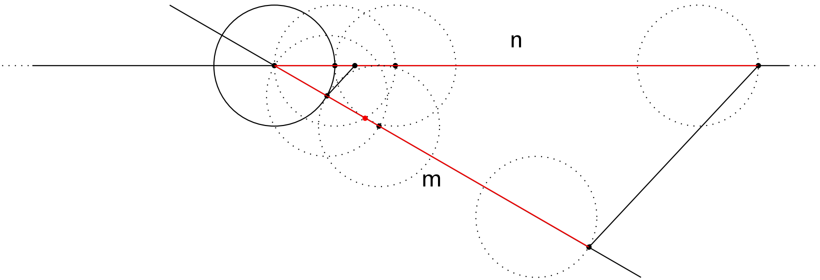
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



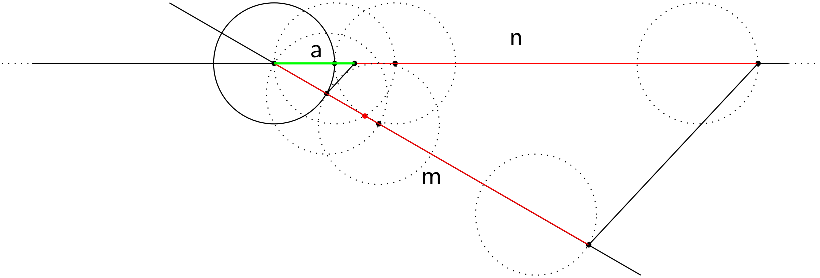
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



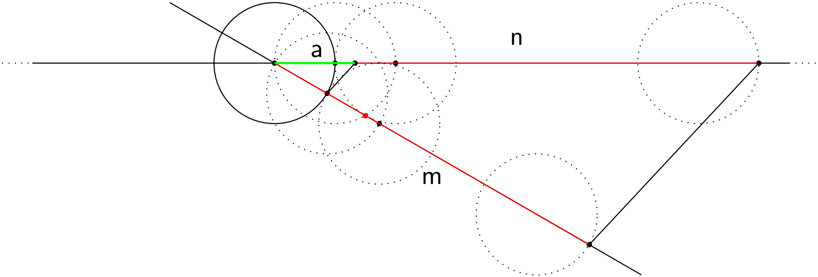
Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



Konstruktion rationaler Streckenlängen

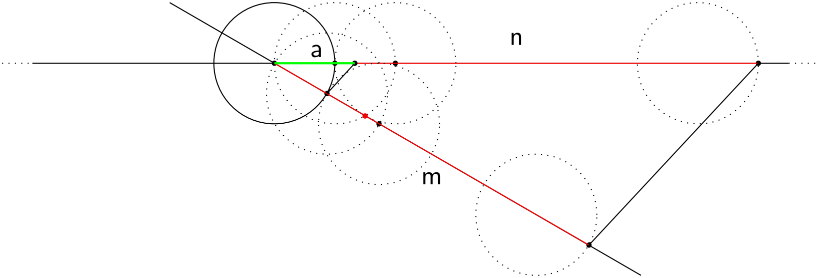
Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



Nach dem Strahlensatz gilt $a = \frac{a}{1} = \frac{n}{m}$!

Konstruktion rationaler Streckenlängen

Wir können sogar Strecken konstruieren, deren Länge eine beliebige positive rationale Zahl ist, d.h. ein Bruch der Form $a = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m.



Nach dem Strahlensatz gilt $a = \frac{a}{1} = \frac{n}{m}$!

Beispielsweise können wir Strecken der Länge $\frac{22}{7}$ oder $\frac{355}{113}$ konstruieren.

Verallgemeinerung

Mit ähnlichen Methoden kann man Folgendes erreichen:

Verallgemeinerung

Mit ähnlichen Methoden kann man Folgendes erreichen:

schon konstruiert:	Strecken der Längen a und b

Verallgemeinerung

Mit ähnlichen Methoden kann man Folgendes erreichen:

schon konstruiert: Strecken der Längen a und b

$$\Big\Downarrow \textit{Zirkel \& Lineal}$$

Verallgemeinerung

Mit ähnlichen Methoden kann man Folgendes erreichen:

schon konstruiert: Strecken der Längen a und b

$$\Big\Downarrow \ \textit{Zirkel \& Lineal}$$

neu konstruiert: Strecken der Längen

- $a + b$
- $a \cdot b$
- a/b, falls $b \neq 0$
- $a - b$, falls $a \geq b$.

Verallgemeinerung

Mit ähnlichen Methoden kann man Folgendes erreichen:

schon konstruiert: Strecken der Längen a und b

$$\Big\Downarrow \quad \textit{Zirkel \& Lineal}$$

neu konstruiert: Strecken der Längen

- $a + b$
- $a \cdot b$
- a/b, falls $b \neq 0$
- $a - b$, falls $a \geq b$.

Mit anderen Worten:

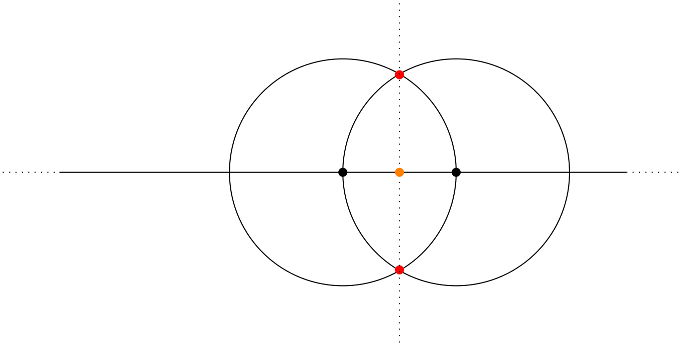
Mit Zirkel und Lineal lassen sich für Streckenlängen die Operationen $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ durchführen!

Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:

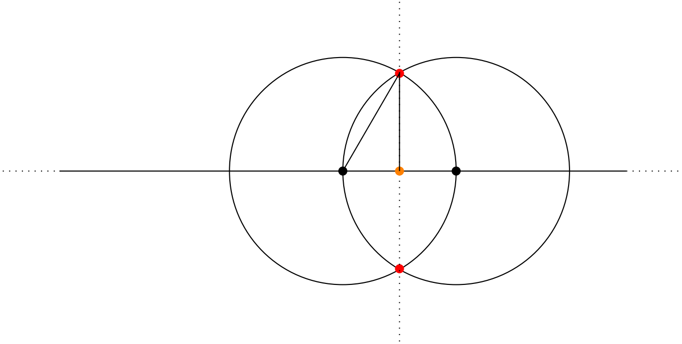
Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:



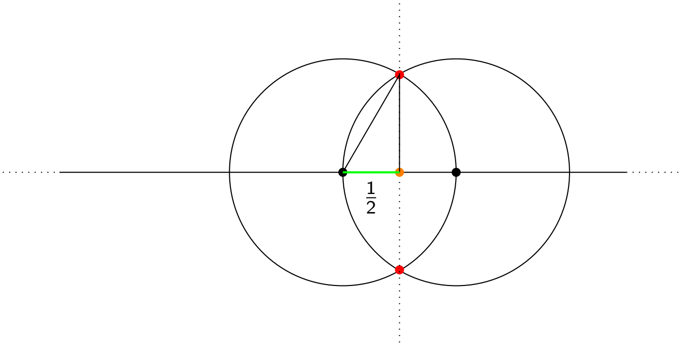
Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:



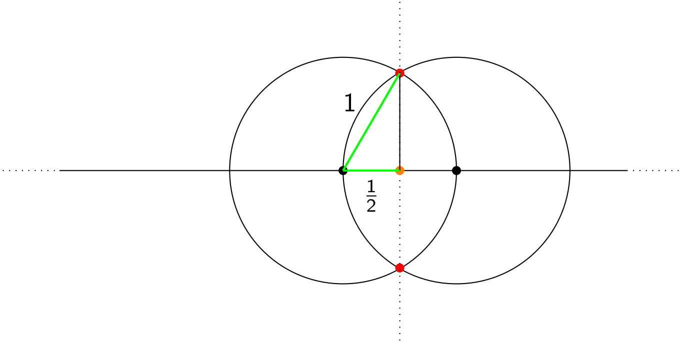
Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:



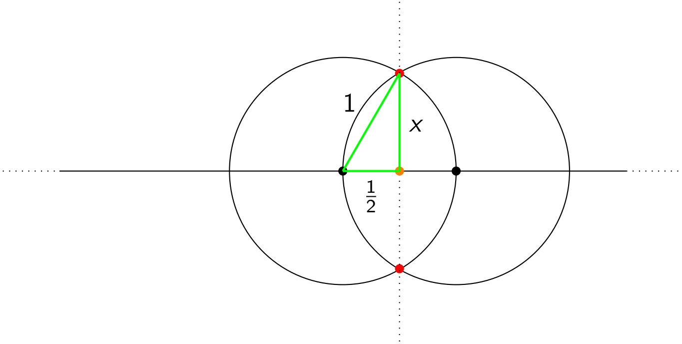
Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:



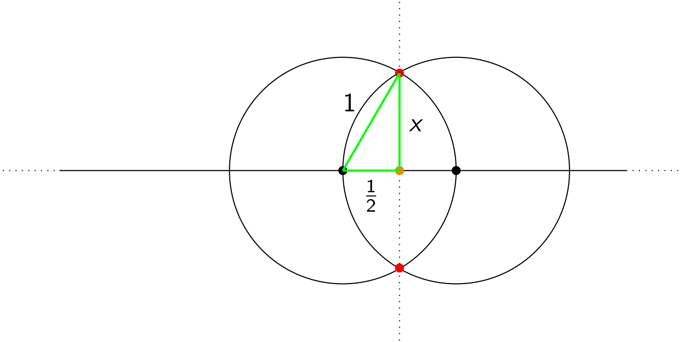
Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:



Es geht aber noch mehr!

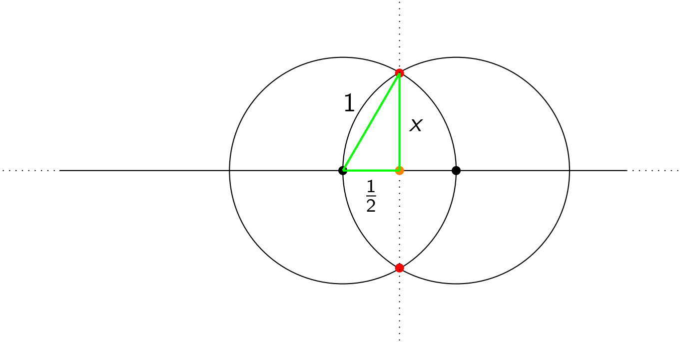
Zurück zum Beispiel vom Anfang:



Satz des Pythagoras: $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$

Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:

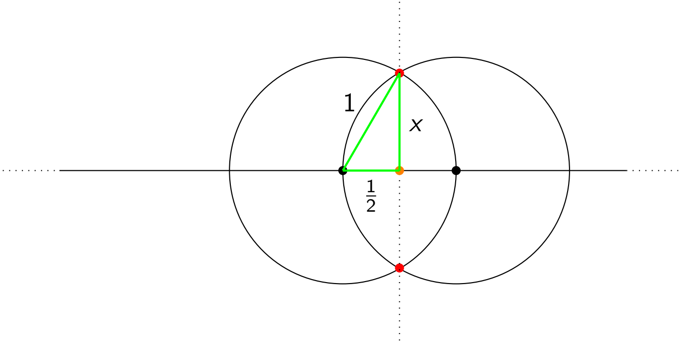


Satz des Pythagoras: $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$

also: $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Es geht aber noch mehr!

Zurück zum Beispiel vom Anfang:



Satz des Pythagoras: $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$

also: $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

also: $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

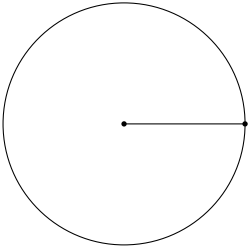
Konstruktion von Quadratwurzeln

Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:

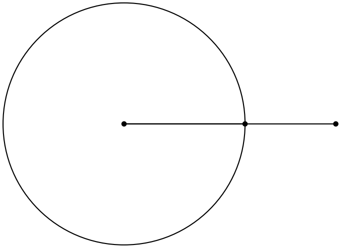
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



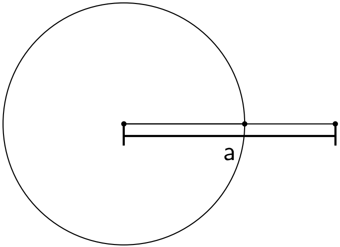
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



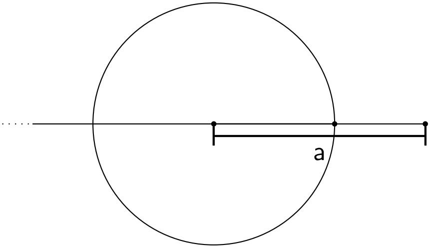
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



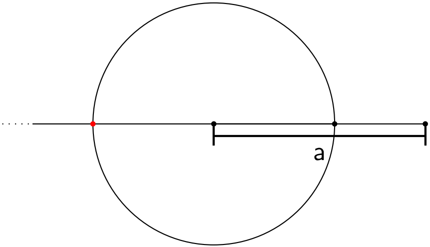
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



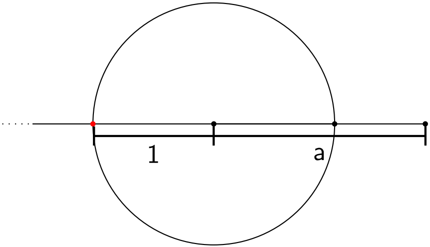
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



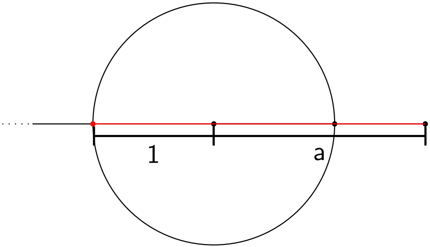
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



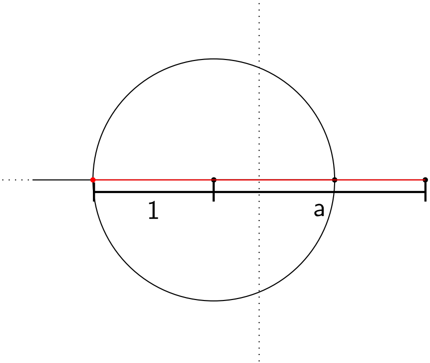
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



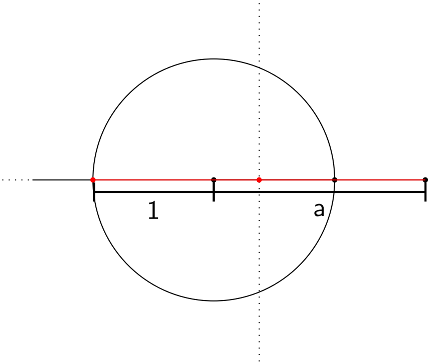
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



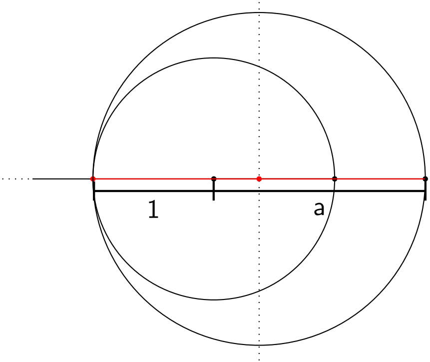
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



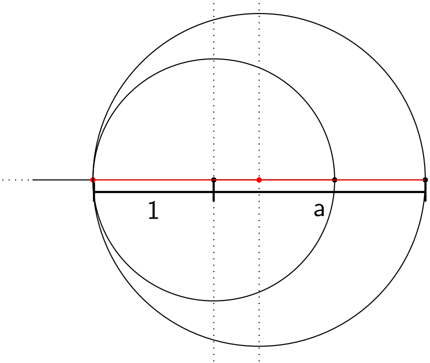
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



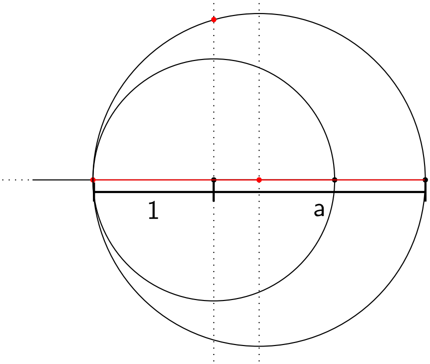
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



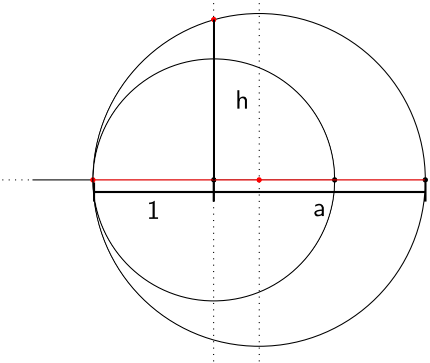
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



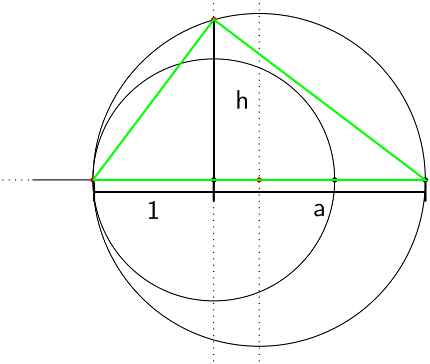
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



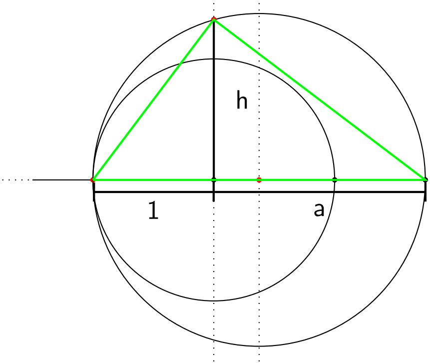
Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



Konstruktion von Quadratwurzeln

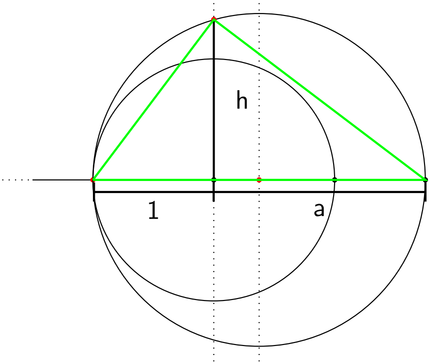
Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



Satz von Thales & Höhensatz:

Konstruktion von Quadratwurzeln

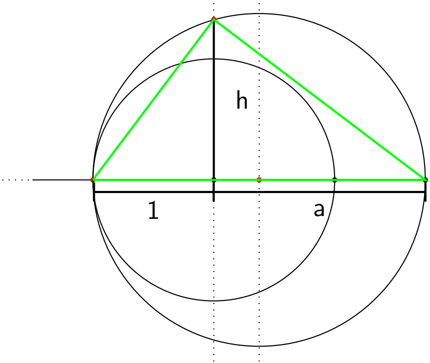
Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



Satz von Thales & Höhensatz: $h^2 = a \cdot 1 = a$

Konstruktion von Quadratwurzeln

Wir haben eben eine Strecke der Länge $a = \frac{n}{m}$ konstruiert:



Satz von Thales & Höhensatz: $h^2 = a \cdot 1 = a$

also: $h = \sqrt{a}$

Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.

Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.

Konstruktion von Quadraten

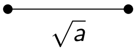
Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:

Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

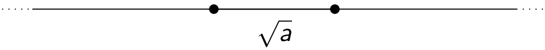
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

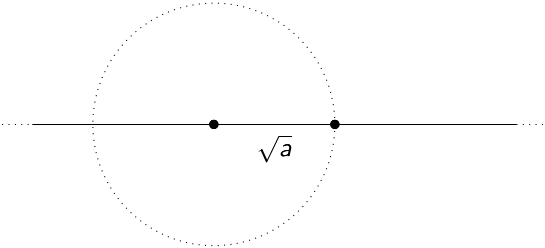
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

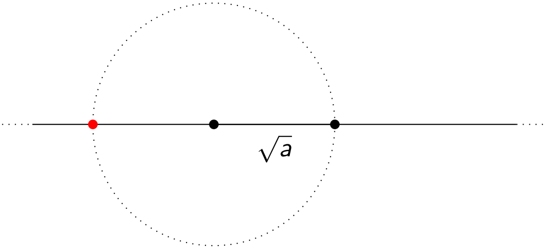
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

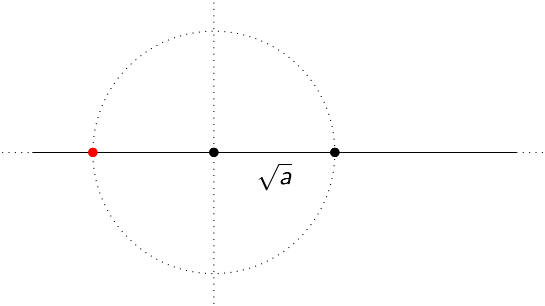
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

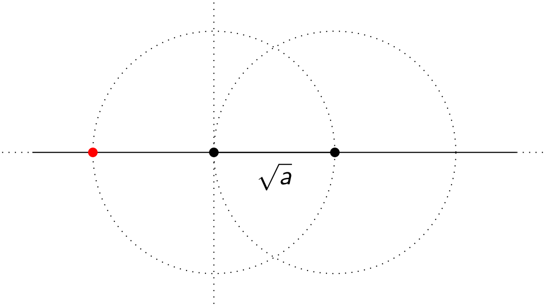
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

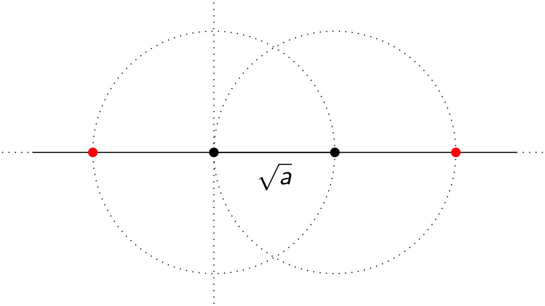
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

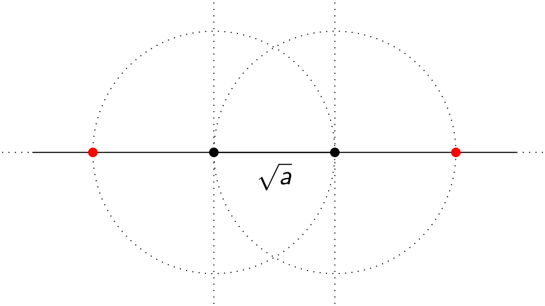
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

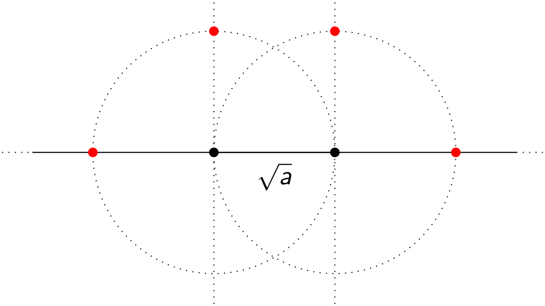
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

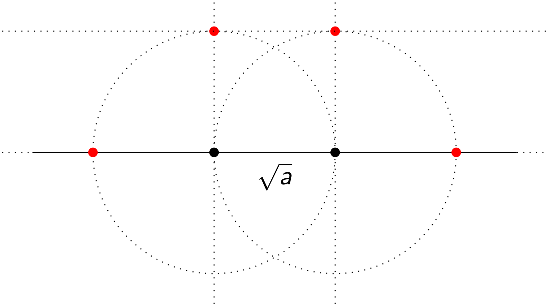
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

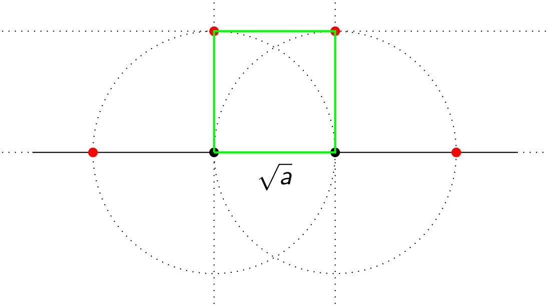
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

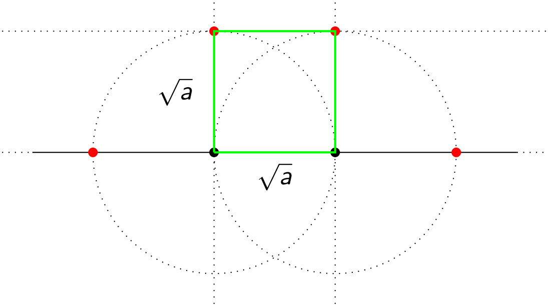
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

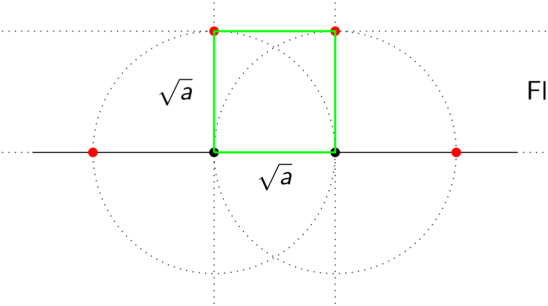
- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Konstruktion von Quadraten

Zu jeder konstruierten Streckenlänge a kann man auch ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich a ist.

- Gegeben ist eine Strecke der Länge a.
- Konstruiere daraus eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ wie eben gesehen.
- Verfahre dann wie folgt:



Flächeninhalt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

Zusammenfassung

Starte mit einem Kreis vom Radius 1.

Zusammenfassung

Starte mit einem Kreis vom Radius 1.

Führe mit bekannten Streckenlängen wiederholt eine der folgenden Operationen durch:

- Addition, Subtraktion
- Multiplikation, Division
- Ziehen von Quadratwurzeln

Zusammenfassung

Starte mit einem Kreis vom Radius 1.

Führe mit bekannten Streckenlängen wiederholt eine der folgenden Operationen durch:

- Addition, Subtraktion
- Multiplikation, Division
- Ziehen von Quadratwurzeln

Man erhält Zahlen wie z.B. $\frac{13-\frac{1}{2}\sqrt{7}}{\sqrt{18+\sqrt{\frac{3}{11}}}} - \sqrt{1 + \frac{3-\sqrt{2}}{8+\frac{17}{4+\sqrt{\frac{17}{3}}}}}$.

Zusammenfassung

Starte mit einem Kreis vom Radius 1.

Führe mit bekannten Streckenlängen wiederholt eine der folgenden Operationen durch:

- Addition, Subtraktion
- Multiplikation, Division
- Ziehen von Quadratwurzeln

Man erhält Zahlen wie z.B. $\frac{13-\frac{1}{2}\sqrt{7}}{\sqrt{18+\sqrt{\frac{3}{11}}}} - \sqrt{1+\frac{3-\sqrt{2}}{8+\frac{17}{4+\sqrt{\frac{17}{3}}}}}$.

Zu jeder positiven Zahl dieser Form kann man mit Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, das diesen Flächeninhalt besitzt!

Mehr geht nicht!

Mehr geht nicht!

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates von der eben beschriebenen Form.

Mehr geht nicht!

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates von der eben beschriebenen Form.

- D.h. ein geschachtelter Ausdruck aus Brüchen und Quadratwurzeln

Mehr geht nicht!

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates von der eben beschriebenen Form.

- D.h. ein geschachtelter Ausdruck aus Brüchen und Quadratwurzeln

Grund

Ist $P = (x, y)$ ein Schnittpunkt von Geraden und Kreisen, so erfüllen seine Koordinaten

- *lineare Gleichungen* oder
- *quadratische Gleichungen*

Mehr geht nicht!

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates von der eben beschriebenen Form.

- D.h. ein geschachtelter Ausdruck aus Brüchen und Quadratwurzeln

Grund

Ist $P = (x, y)$ ein Schnittpunkt von Geraden und Kreisen, so erfüllen seine Koordinaten

- *lineare Gleichungen* oder
- *quadratische Gleichungen*

Zum Lösen solcher Gleichungen genügen die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{\ }$

Zurück zum Ausgangsproblem:

Zurück zum Ausgangsproblem:

WENN

die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal möglich ist,

Zurück zum Ausgangsproblem:

WENN

die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal möglich ist,

DANN

muss der Flächeninhalt des Kreises ein geschachtelter Ausdruck aus Brüchen und Quadratwurzeln sein.

Zurück zum Ausgangsproblem:

WENN

die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal möglich ist,

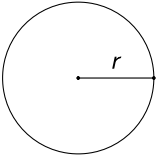
DANN

muss der Flächeninhalt des Kreises ein geschachtelter Ausdruck aus Brüchen und Quadratwurzeln sein.

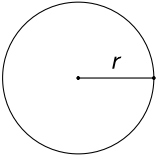
FRAGE

Ist das so?

III. Die Kreiszahl



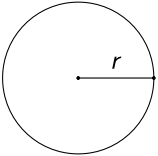
III. Die Kreiszahl



Flächeninhalt A eines Kreises vom Radius r

$$A = \pi \cdot r^2$$

III. Die Kreiszahl

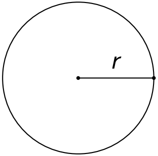


Flächeninhalt A eines Kreises vom Radius r

$$A = \pi \cdot r^2$$

Hierbei ist π eine Konstante – die sogenannte *Kreiszahl*.

III. Die Kreiszahl



Flächeninhalt A eines Kreises vom Radius r

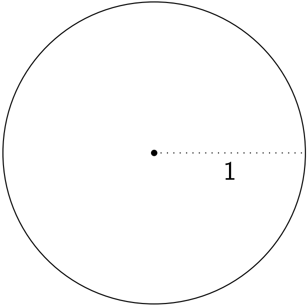
$$A = \pi \cdot r^2$$

Hierbei ist π eine Konstante – die sogenannte *Kreiszahl*.

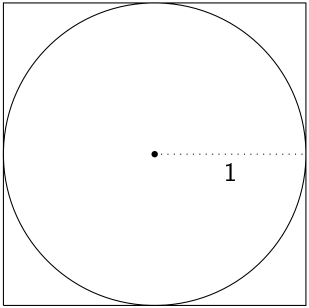
Definition

Wir definieren π als den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1.

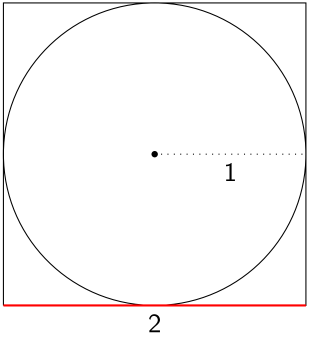
Approximation von π nach Archimedes



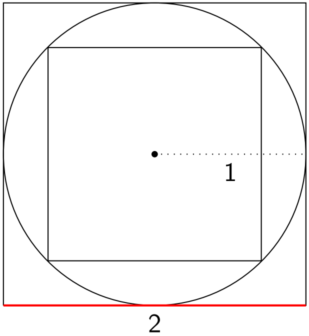
Approximation von π nach Archimedes



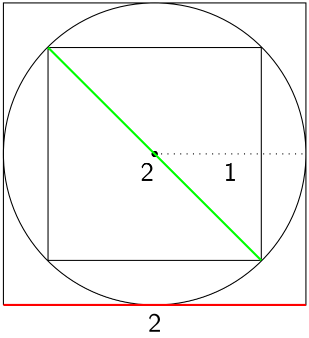
Approximation von π nach Archimedes



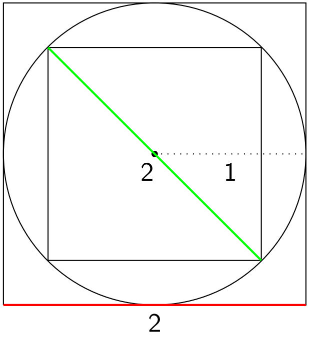
Approximation von π nach Archimedes



Approximation von π nach Archimedes

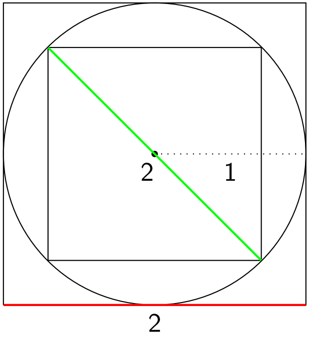


Approximation von π nach Archimedes



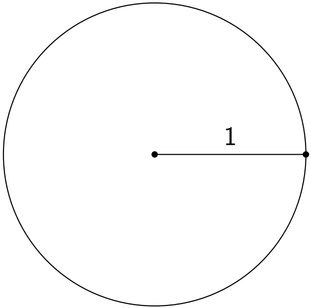
kleine Quadratfläche $<$ Kreisfläche $<$ große Quadratfläche

Approximation von π nach Archimedes

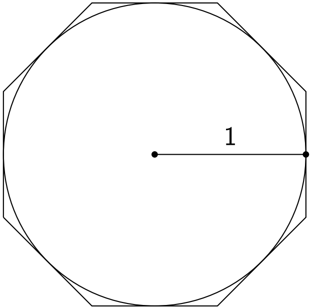


kleine Quadratfläche	$<$	Kreisfläche	$<$	große Quadratfläche
2	$<$	π	$<$	4

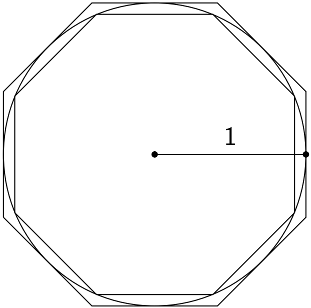
Approximation von π nach Archimedes



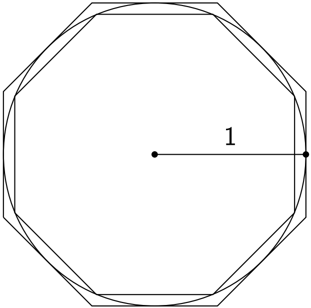
Approximation von π nach Archimedes



Approximation von π nach Archimedes

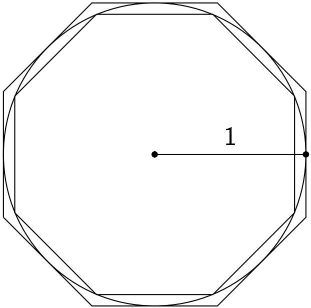


Approximation von π nach Archimedes



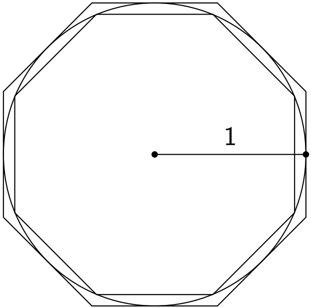
kleine 8-Eckfläche $<$ Kreisfläche $<$ große 8-Eckfläche

Approximation von π nach Archimedes



kleine 8-Eckfläche	$<$	Kreisfläche	$<$	große 8-Eckfläche
$2\sqrt{2}$	$<$	π	$<$	$8(\sqrt{2}-1)$

Approximation von π nach Archimedes



$$\begin{array}{rcccl} \text{kleine 8-Eckfläche} & < & \text{Kreisfläche} & < & \text{große 8-Eckfläche} \\ 2\sqrt{2} & < & \pi & < & 8(\sqrt{2}-1) \\ \approx 2,83 & < & \pi & < & \approx 3,31 \end{array}$$

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	2	96-Eck

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	2	96-Eck
Liu Hui	ca. 263 n.Chr.	5	3072-Eck

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	2	96-Eck
Liu Hui	ca. 263 n.Chr.	5	3072-Eck
Mas'ud al-Kaschi	ca. 1424	15	$(3 \cdot 2^{28})$-Eck

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	2	96-Eck
Liu Hui	ca. 263 n.Chr.	5	3072-Eck
Mas'ud al-Kaschi	ca. 1424	15	$(3 \cdot 2^{28})$-Eck
Ludolph v. Ceulen	1610	35	2^{62}-Eck

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	2	96-Eck
Liu Hui	ca. 263 n.Chr.	5	3072-Eck
Mas'ud al-Kaschi	ca. 1424	15	$(3 \cdot 2^{28})$-Eck
Ludolph v. Ceulen	1610	35	2^{62}-Eck

Nach Ludolph von Ceulen wurde die Kreiszahl bis ins 19. Jahrhundert hinein als die *Ludolph'sche Zahl* bezeichnet.

Näherungen von π im Laufe der Zeit

Mathematiker	**Jahr**	**Nachkommastellen**	**Vieleck**
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	2	96-Eck
Liu Hui	ca. 263 n.Chr.	5	3072-Eck
Mas'ud al-Kaschi	ca. 1424	15	$(3 \cdot 2^{28})$-Eck
Ludolph v. Ceulen	1610	35	2^{62}-Eck

Nach Ludolph von Ceulen wurde die Kreiszahl bis ins 19. Jahrhundert hinein als die *Ludolph'sche Zahl* bezeichnet.

$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288\ldots$$

Wozu sind diese Näherungen gut?

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.
- Man vollzieht die Konstruktion Schritt für Schritt nach und berechnet den exakten Flächeninhalt des gezeichneten Quadrates.

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.
- Man vollzieht die Konstruktion Schritt für Schritt nach und berechnet den exakten Flächeninhalt des gezeichneten Quadrates.
- Nun vergleicht man diesen Wert mit einer bekannten Näherung für π.

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.
- Man vollzieht die Konstruktion Schritt für Schritt nach und berechnet den exakten Flächeninhalt des gezeichneten Quadrates.
- Nun vergleicht man diesen Wert mit einer bekannten Näherung für π.

Beispiel

Der exakte Flächeninhalt des Quadrates sei $\frac{355}{113}$.

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.
- Man vollzieht die Konstruktion Schritt für Schritt nach und berechnet den exakten Flächeninhalt des gezeichneten Quadrates.
- Nun vergleicht man diesen Wert mit einer bekannten Näherung für π.

Beispiel

Der exakte Flächeninhalt des Quadrates sei $\frac{355}{113}$.
Nun nähere und vergleiche:

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.
- Man vollzieht die Konstruktion Schritt für Schritt nach und berechnet den exakten Flächeninhalt des gezeichneten Quadrates.
- Nun vergleicht man diesen Wert mit einer bekannten Näherung für π.

Beispiel

Der exakte Flächeninhalt des Quadrates sei $\frac{355}{113}$.
Nun nähere und vergleiche:

$$\frac{355}{113} \approx 3{,}1415929...$$

Wozu sind diese Näherungen gut?

Man kann in konkreten Fällen die Richtigkeit einer Lösung widerlegen!

- Jemand gibt eine konkrete Konstruktion eines Quadrates mit Zirkel und Lineal an.
- Er behauptet, es habe den Flächeninhalt π.
- Man vollzieht die Konstruktion Schritt für Schritt nach und berechnet den exakten Flächeninhalt des gezeichneten Quadrates.
- Nun vergleicht man diesen Wert mit einer bekannten Näherung für π.

Beispiel

Der exakte Flächeninhalt des Quadrates sei $\frac{355}{113}$.
Nun nähere und vergleiche:

$$\begin{aligned} \frac{355}{113} &\approx 3,1415929... \\ \pi &\approx 3,1415926... \end{aligned}$$

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig
- oder sogar unmöglich zu beantworten ist?

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig
- oder sogar unmöglich zu beantworten ist?

Zum Vergleich:

- Auch die exakte Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist unbekannt!

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig
- oder sogar unmöglich zu beantworten ist?

Zum Vergleich:

- Auch die exakte Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist unbekannt!
- Trotzdem kann man leicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig
- oder sogar unmöglich zu beantworten ist?

Zum Vergleich:

- Auch die exakte Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist unbekannt!
- Trotzdem kann man leicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.
- Grund: $\sqrt{2}$ ist bestimmt durch die einfache Eigenschaft $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig
- oder sogar unmöglich zu beantworten ist?

Zum Vergleich:

- Auch die exakte Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist unbekannt!
- Trotzdem kann man leicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.
- Grund: $\sqrt{2}$ ist bestimmt durch die einfache Eigenschaft $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Eigentliches Problem

Die Eigenschaften der Kreiszahl sind kompliziert!

Die exakte Dezimalbruchentwicklung von π ist unbekannt!

Ist das der Grund dafür, dass

- die Frage nach der Quadratur des Kreises so schwierig
- oder sogar unmöglich zu beantworten ist?

Zum Vergleich:

- Auch die exakte Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist unbekannt!
- Trotzdem kann man leicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.
- Grund: $\sqrt{2}$ ist bestimmt durch die einfache Eigenschaft $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Eigentliches Problem

Die Eigenschaften der Kreiszahl sind kompliziert!
Sie lassen sich schwer mit den Eigenschaften anderer Zahlen vergleichen.

IV. Die Transzendenz von π

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

- $x = \frac{3}{4}$ erfüllt die Gleichung $x - \frac{3}{4} = 0$.

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

- $x = \frac{3}{4}$ erfüllt die Gleichung $x - \frac{3}{4} = 0$.
- $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ erfüllt die Gleichung $x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

- $x = \frac{3}{4}$ erfüllt die Gleichung $x - \frac{3}{4} = 0$.
- $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ erfüllt die Gleichung $x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$
- $x = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ erfüllt die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

- $x = \frac{3}{4}$ erfüllt die Gleichung $x - \frac{3}{4} = 0$.
- $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ erfüllt die Gleichung $x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$
- $x = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ erfüllt die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

Definition

Eine Zahl x heißt *algebraisch*, wenn sie eine *polynomiale Gleichung* erfüllt:

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

- $x = \frac{3}{4}$ erfüllt die Gleichung $x - \frac{3}{4} = 0$.
- $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ erfüllt die Gleichung $x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$
- $x = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ erfüllt die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

Definition

Eine Zahl x heißt *algebraisch*, wenn sie eine *polynomiale Gleichung* erfüllt:

$$x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 = 0,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist und $b_0, \ldots, b_{n-1}$ Brüche ganzer Zahlen sind.

IV. Die Transzendenz von π

Mit Zirkel und Lineal konstruierte Zahlen haben eine gemeinsame Eigenschaft: Sie erfüllen einen bestimmten Typ von Gleichungen.

- $x = \frac{3}{4}$ erfüllt die Gleichung $x - \frac{3}{4} = 0$.
- $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ erfüllt die Gleichung $x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$
- $x = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ erfüllt die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

Definition

Eine Zahl x heißt *algebraisch*, wenn sie eine *polynomiale Gleichung* erfüllt:

$$x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 = 0,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist und $b_0, \ldots, b_{n-1}$ Brüche ganzer Zahlen sind. Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen *transzendent*.

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates eine algebraische Zahl.

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates eine algebraische Zahl.

- Diese Zahlen erfüllen also stets eine geeignete polynomiale Gleichung.

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates eine algebraische Zahl.

- Diese Zahlen erfüllen also stets eine geeignete polynomiale Gleichung.

Satz (Ferdinand v. Lindemann, 1882)

Die Kreiszahl π ist transzendent.

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates eine algebraische Zahl.

- Diese Zahlen erfüllen also stets eine geeignete polynomiale Gleichung.

Satz (Ferdinand v. Lindemann, 1882)

Die Kreiszahl π ist transzendent.

- Die Kreiszahl π erfüllt also keine polynomiale Gleichung.

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates eine algebraische Zahl.

- Diese Zahlen erfüllen also stets eine geeignete polynomiale Gleichung.

Satz (Ferdinand v. Lindemann, 1882)

Die Kreiszahl π ist transzendent.

- Die Kreiszahl π erfüllt also keine polynomiale Gleichung.
- Das ist eine Eigenschaft, die π von allen Zahlen unterscheidet, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann!

Satz

Startet man mit einem Kreis vom Radius 1 und konstruiert mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrates eine algebraische Zahl.

- Diese Zahlen erfüllen also stets eine geeignete polynomiale Gleichung.

Satz (Ferdinand v. Lindemann, 1882)

Die Kreiszahl π ist transzendent.

- Die Kreiszahl π erfüllt also keine polynomiale Gleichung.
- Das ist eine Eigenschaft, die π von allen Zahlen unterscheidet, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann!

Folgerung

Es ist unmöglich, aus einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!