Seminarprogramm

Algebraische Graphentheorie

Universität Duisburg-Essen, Sommersemester 2015

Veranstalter: Prof. Dr. J. Kohlhaase, Dr. A. Pal
Ort und Zeit: Di 12–14
Vorbesprechung: 11.03.2015, 12 c.t., WSC-N-U-3.05

Inhalt: Die algebraische Graphentheorie befasst sich damit, einen Graphen mit Hilfe von Methoden der linearen Algebra zu untersuchen. Hierbei werden einem endlichen (einfachen, gerichteten oder orientierten) Graphen eine Reihe von Matrizen zugeordnet. Die Untersuchung dieser Matrizen – etwa nach ihrem Rang oder ihren Eigenwerten – erlaubt es, Rückschlüsse auf die Eigenschaften des gegebenen Graphen zu ziehen. Klassische Resultate betreffen etwa die Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten und Spannbäume.

Neben der Bereitstellung der graphentheoretischen Grundlagen wird ein Schwerpunkt des Seminars auf der Behandlung konkreter Beispiele liegen. Insbesondere werden wir die Eigenwerte der sogenannten Adjazenz- und Laplacematrix berechnen, wenn der zugrundeliegende Graph ein Kreis, ein vollständiger Graph, ein vollständiger bipartiter Graph, ein symplektischer Graph, ein Weg, ein höher dimensionaler Würfel, der Petersengraph oder einer der jeweiligen Kantengraphen ist.

Sofern nichts anderes angegeben ist, beziehen sich die folgenden Literaturangaben auf die Hauptquelle [4].

1. Graphentheoretische Grundlagen [07.04.]: §§1.1–1.5 und §1.7; (gerichtete) Graphen, Wege und Zusammenhang, die vollständigen Graphen K_n, Teil- und Untergraphen, Valenz und Regularität, Homomorphismen und Färbungszahl, die Kreise C_n, Kantengraphen (insbesondere Lemmata 1.7.1, 1.7.3 und 1.7.5, sowie die Beispiele des Sterns $K_{1,n}$ und des Weges P_n), die vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$

2. Adjazenz- und Inzidenzmatrizen [14.04.]: §§8.1–8.2; die Adjazenzmatrix eines (gerichteten) Graphen, das Spektrum eines Graphen, Invarianten und Nichtinvarianten des Spektrums, Adjazenzmatrix und Kantenzüge (vgl. Lemma 8.1.2 & Corollary 8.1.3; [1], Corollary 1.4.3 auf S. 35), die Inzidenzmatrix eines Graphen, die Rangformel in Theorem 8.2.1, das Spektrum des Kantengraphen (vgl. Lemmata 8.2.2–8.2.5)

3. Inzidenzmatrizen orientierter Graphen [21.04.]: §§8.3–8.4; Berechnung der Spektren von K_n und $L(K_n)$ (vgl. [1], S. 36), K_n wird durch sein Spektrum eindeutig bestimmt, orientierte Graphen und ihre Inzidenzmatrizen, die Rangformel in Theorem 8.3.1, Zusammenhang zur Adjazenzmatrix (vgl. Lemma 8.3.2), wiederholen Sie die grundlegenden Aussagen zur Eigenraumzerlegung reeller, symmetrischer Matrizen in §8.4

4. Konstruktion von Eigenvektoren [28.04.]: §8.5; erläutern Sie die vorgestellte Strategie zur Konstruktion von Eigenvektoren, das Komplement eines regulären Graphen und dessen Spektrum (vgl. Lemma 8.5.1), erläutern Sie die Realisierungen $J(5,2,0)$, $\overline{L(K_5)}$ und K_6^* des Petersen-Graphen P (vgl. §1.6 und §1.8), die Spektren von P und $L(P)$ (vgl. §8, Aufgabe 9), das Spektrum von C_n (vgl. auch [1], S. 39/40), das Spektrum von P_n (vgl. [1], S. 40)

5. Der Satz von Perron-Frobenius [05.05.]: §§8.6–8.8; untere Schranken für Kantengraphen (vgl. Lemmata 8.6.1 & 8.6.2), Schachtelungssatz für Untergraphen (vgl. Lemma 8.6.3), der gerichtete Graph einer symmetrischen Matrix, subharmonische Funktionen (vgl. Lemmata 8.7.1–8.7.3), der Satz von Perron-Frobenius (vgl. Theorem 8.8.1)

6. Spektralzerlegung und rationale Funktionen [12.05.]: §8.8 Ende & §§8.12–8.13; Charakterisierung bipartiter Graphen (vgl. Theorem 8.8.2), bestimmen Sie hiermit das Spektrum von $K_{m,n}$ (vgl. [1], S. 41), erläutern Sie die Spektralzerlegung einer reellen, symmetrischen Matrix, Anzahl der verschiedenen Eigenwerte und Durchmesser (vgl. Lemma 8.12.1; Illustration anhand von Beispielen), rationale Funktionen und das Entfernen von Knoten (vgl. §8.13)

7. Stark reguläre Graphen [19.05.]: §§10.1–10.4; stark reguläre Graphen, Parameter und Zusammenhang (vgl. Lemma 10.1.1), die Realisierbarkeitsbedingung (10.1), Beispiele: $L(K_n)$, $L(K_{n,n})$, Petersen- und Clebschgraph, das Spektrum eines stark regulären Graphen, Charakterisierung stark regulärer Graphen (vgl. Lemma 10.2.1), Paleygraphen und die Graphen lateinischer Quadrate (jeweils mit Nachweis der starken Regularität und Bestimmung des Spektrums), die Eindeutigkeit des Clebschgraphen (vgl. Theorem 10.6.4 ohne Beweis)

8. Binärer Rang und symplektische Graphen [02.06.]: §§8.9–8.11 & §10.12; beweisen Sie soweit möglich die Ergebnisse in §§8.9.1–8.10.1, der binäre Rang eines Graphen, reduzierte Graphen, definieren Sie die symplektischen Graphen $\mathrm{Sp}(2r)$ und beweisen Sie die Eigenschaften in Theorem 8.11.1/2 und Lemma 10.12.1

9. Kartesische Produkte [09.06.]: Kartesische Produkte von Graphen (vgl. §7.14), zeigen Sie $L(K_{m,n}) \cong K_m \Box K_n$, definieren Sie den k-Würfel Q_k wie in §3.1 und zeigen Sie $Q_k \cong K_2^{\Box k}$, recherchieren Sie das Kroneckerprodukt von Matrizen, das Verhalten des Spektrums bei Kartesischen Produkten (vgl. [2], 1.4.6), bestimmen Sie hiermit die Spektren von $L(K_{m,n})$ und Q_k

10. Die Laplacematrix [16.06.]: §13.1; definieren Sie die Laplacematrix eines Graphen, die Rangformel in Lemma 13.1.1, Spektrum und Laplacespektrum regulärer Graphen (vgl. Lemma 13.1.2), das Laplacespektrum von Komplementen (vgl. Lemma 13.1.3), berechnen Sie das Laplacespektrum von $K_{m,n}$ und das gewöhnliche Spektrum von $L(K_{m,n})$ (letzteres mit [5], Theorem 3.9 und [4], Lemma 13.1.2), der größte Eigenwert und seine Multiplizität (vgl. Corollary 13.1.4), die quadratische Form der Laplacematrix (vgl. Lemma 13.1.5)

11. Spannbäume [23.06.]: §13.2; Elimination und Kontraktion von Kanten, Laplacematrix und die Anzahl von Spannbäumen (vgl. Theorem 13.2.1), das Beispiel K_n (vgl. Corollary 13.2.2), Anzahl der Spannbäume und Produkte von Eigenwerten (vgl. Lemma 13.2.4), bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume von C_n direkt, bestimmen Sie die Anzahl der

Spannbäume von Q_k mit Hilfe von Lemma 13.1.2 und Lemma 13.2.4, recherchieren Sie weitere bekannte Ergebnisse in der Literatur

12. Darstellungen, Energie und Konnektivität [30.06.]: §§13.3–13.5; (balancierte) Darstellungen eines Graphen, Energie einer Darstellung und die Energieformel in Lemma 13.3.1, gewichtete Laplacematrix, orthogonale Darstellungen und die Energieschranke in Theorem 13.4.1 (Beweis von Corollary 9.5.2 wird im nächsten Vortrag gebracht), der Eigenwert λ_2 wird auch als algebraische Konnektitivät bezeichnet ($\lambda_2 > 0$ genau dann, wenn der Graph zusammenhängt; vgl. Lemma 13.1.1), die Formeln in Corollary 13.4.2, Konnektivität beim Entfernen von Ecken (vgl. Theorem 13.5.1), beweisen Sie die Ungleichungen $\lambda_2(X) \leq \kappa_0(X) \leq \kappa_1(X) \leq \delta(X)$, geben Sie die algebraische Konnektivität von C_n, Q_k, K_n, $K_{m,n}$ und P an

13. Verschachtelung und Leitfähigkeit [07.07.]: §9.1, §9.5 & §§13.6–13.7; beweisen Sie die Aussagen über (enge) Verschachtelung und die Rayleighungleichungen in Theorem 9.1.1, Theorem 9.5.1 und Corollary 9.5.2, Konnektivität unter Hinzufügen von Kanten (vgl. Lemma 13.6.1 und Theorem 13.6.2), Konnektivität und Leitfähigkeit (vgl. Lemma 13.7.1 und Corollary 13.7.2), Zerschneiden von Graphen und die Abschätzungen in Corollary 13.7.3 und Lemma 13.7.4

14. Verallgemeinerte Kantengraphen [14.07.]: §§12.1–12.4 & §12.8; verallgemeinerte Kantengraphen, maximale und sternabgeschlossene Geradenmengen (vgl. Theorem 12.2.1 und Lemma 12.2.2), Sternabgeschlossenheit und Spiegelungen (vgl. Lemma 12.3.1), unzerlegbare Geradenmengen und Zusammenhang (vgl. §12.4), erläutern Sie den Klassifikationssatz 12.7.4 ohne Beweis, Kriterien für verallgemeinerte Kantengraphen (vgl. Corollary 12.8.1 & Theorem 12.8.2)

Literatur

[1] L.W. Beineke, R.J. Wilson: *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 2005

[2] A.E. Brouwer, W.H. Haemers: *Spectra of Graphs*, Universitext, 2012; online-Zugriff über die Universitätsbibliothek

[3] R. Diestel: *Graphentheorie*, 3. Auflage, Springer, 2006

[4] C. Godsil, G. Royle: *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics **207**, Springer, 2001

[5] B. Mohar: The Laplacian spectrum of graphs, in *Graph theory, combinatorics, and applications*, Volume II, Wiley, 1991, 871–898, online erhältlich unter `http://www.fmf.uni-lj.si/~mohar/Papers/Spec.pdf`