Seminarprogramm

Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Universität Duisburg-Essen
Wintersemester 2016/17

Veranstalter: Prof. Dr. J. Kohlhaase, Dr. A. Pal
Ort und Zeit: WSC-S-U-4.02, Di 14–16
Vorbesprechung & Anmeldung: 01.09.2016, 14:15 Uhr, WSC-S-U-3.01

Inhalt: Die Darstellungstheorie spielt in verschiedenen Bereichen der modernen Mathematik eine herausragende Rolle. Dabei wird versucht, die innere Struktur einer gegebenen Gruppe zu analysieren, indem man sie auf geeigneten Vektorräumen *operieren* lässt. Im Proseminar werden wir präzisieren, was das genau bedeutet und zu welchen Ergebnissen eine solche Strukturanalyse führt. Dabei werden wir uns auf den einfachsten Fall beschränken: Alle betrachteten Gruppen sind endlich, und alle Vektorräume sind endlich dimensionale Vektorräume über den komplexen Zahlen.

Behandelte Themen: Grundbegriffe der Darstellungstheorie, Satz von Maschke, Homomorphismen von Darstellungen, die Orthogonalitätsrelationen von Schur, Charaktere und Klassenfunktionen, reguläre Darstellungen, Gruppenringe und das Faltungsprodukt, Fourieranalysis auf endlichen Gruppen, der Dimensionssatz, Induktion und Frobeniusreziprozität, das Irreduzibilitätskriterium von Mackey, Partitionen und Young-Tableaux, die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppen

Alle Referenzen beziehen sich im Folgenden auf die Hauptquelle [2]. Vor Seminarbeginn machen Sie sich bitte mit den Konventionen und dem Inhalt von [2], §2 vertraut. Alle dort zusammengestellten Ergebnisse wurden in den Anfängervorlesungen zur linearen Algebra behandelt.

1. Grundbegriffe der Darstellungstheorie [18.10.]: §§3.1.1–3.1.19; Definition einer Darstellung; Grad (auch: Dimension) einer Darstellung; Beispiele; Äquivalenz von Darstellungen mit Beispiel; die Standarddarstellung von S_n; Unterdarstellungen (auch: G-invariante Unterräume); direkte Summen (vgl. 3.1.12; 3.1.14 auslassen); irreduzible Darstellungen mit Beispielen und Gegenbeispielen; Irreduzibilitätskriterium für zweidimensionale Darstellungen

2. Der Satz von Maschke [25.10.]: §§3.1.21–3.2.8; zerlegbare und vollständig reduzible Darstellungen; Stabilität von Irreduzibilität/Zerlegbarkeit/vollständiger Zerlegbarkeit unter Äquivalenz; unitäre Darstellungen mit Beispiel; der Alternativsatz in Proposition 3.2.3; jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist äquivalent zu einer unitären Darstellung; das Gegenbeispiel 3.2.6; der Satz von Maschke

3. Homomorphismen von Darstellungen [08.11.]: §§4.1.1–4.2.1; Homomorphismen von Darstellungen; die Notation $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \rho)$; Kerne und Bilder sind Unterdarstellungen; die Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \rho)$ (im Fall $\varphi = \rho$ ist das ein Ring mit Multiplikation $\circ$); das

Lemma von Schur; irreduzible Darstellungen endlicher abelscher Gruppen sind eindimensional; Diagonalisierbarkeit von Darstellungen endlicher abelscher Gruppen; arbeiten Sie Bemerkung 4.1.11 aus; der Gruppenring $L(G)$ als unitärer Vektorraum; bestimmen Sie die Dimension von $L(G)$ wie in 2.2.2

4. Die Orthogonalitätsrelationen von Schur [15.11.]: §§4.2.2–4.2.10; Formulierung der Orthogonalitätsrelationen; die Surjektion $P = (T \mapsto T^\sharp) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_G(\varphi, \rho)$; wiederholen Sie die Definition der Spur $\mathrm{Tr}(A)$ einer quadratischen Matrix und zeigen Sie $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$; $T^\sharp$ für irreduzible Darstellungen; die darstellende Matrix von P bzgl. der Basis $(E_{ij})_{i,j}$ von $\mathbb{C}^{m\times n}$ im Fall unitärer Darstellungen (vgl. 4.2.4–4.2.7); Beweis der Orthogonalitätsrelationen und Folgerungen

5. Charaktere und Klassenfunktionen [22.11.]: §§4.3.1–4.3.15; der Charakter einer Darstellung; irreduzible Charaktere; Charakter und Grad; äquivalente Darstellungen haben denselben Charakter; Klassenfunktionen; die Notation $Z(L(G))$; Charaktere sind Klassenfunktionen; $Z(L(G))$ ist ein Untervektorraum von $L(G)$; die Menge $\mathrm{Cl}(G)$ der Konjugationsklassen von G; die Dimension von $Z(L(G))$; die ersten Orthogonalitätsrelationen; Abschätzung der Anzahl von Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen; die Notation $m\varphi$; Multiplizitäten; Charaktere direkter Summen; Berechnung und Eindeutigkeit der Multiplizitäten; das Irreduzibilitätskriterium in 4.3.15

6. Die reguläre Darstellung [29.11.]: §§4.4.1–4.5.1; der Vektorraum $\mathbb{C}X$; die reguläre Darstellung $L : G \to \mathbb{C}G$; L ist unitär; der Charakter von L; die Zerlegung von L in ihre irreduziblen Unterdarstellungen; die Folgerungen in 4.4.5–4.4.9; die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; die Charaktertafel einer endlichen Gruppe; die zweiten Orthogonalitätsrelationen; irreduzible Darstellungen von Produkten endlicher, abelscher Gruppen

7. Das Faltungsprodukt [06.12.]: §§5.1.1–5.2.4; periodische Funktionen auf $\mathbb{Z}$ und ihre Fouriertransformation; Fourierinversion auf zyklischen Gruppen; beweisen Sie alle in §5.1 gemachten Aussagen im Detail; Definition des Faltungsproduktes auf $L(G)$; $L(G)$ als Ring mit Eins; das Zentrum $Z(R)$ eines Ringes R; recherchieren Sie einen Beweis für die Gleichung $Z(\mathbb{C}^{n\times n}) = \mathbb{C}$ (Zentrum des Matrizenringes; vgl. Aufgabe 5.10); das Zentrum des Ringes $L(G)$ ist die Menge der Klassenfunktionen

8. Fourieranalysis auf endlichen abelschen Gruppen [13.12.]: §§5.3.1–5.3.9; die duale Gruppe $\hat{G}$; die Gruppenstruktur auf $\hat{G}$; beweisen Sie ausführlich Beispiel 5.3.3; lösen Sie Aufgabe 5.13 und zeigen Sie $G \cong \hat{G}$ im Allgemeinen (formulieren Sie den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen ohne Beweis); Definition der Fouriertransformation; die Fourierinversion; die Fouriertransformation ist ein $\mathbb{C}$-linearer Ringisomorphismus (ergänzen Sie im Beweis, dass das Einselement auf das Einselement abgebildet wird); explizite Formeln für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

9. Fourieranalysis auf endlichen Gruppen [20.12.]: §§5.5.1–5.5.7; G ist genau dann abelsch, wenn der Gruppenring $L(G)$ kommutativ ist; die Reformulierung $L(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$ des Satzes über die Fouriertransformation für endliche abelsche Gruppen; Definition der Fouriertransformation für endliche Gruppen im Allgemeinen; die Fourierinversion; die Fouriertransformation ist ein $\mathbb{C}$-linearer Ringisomorphismus (ergänzen Sie im Beweis, dass das Einselement auf das Einselement abgebildet wird); beweisen Sie ausführlich Bemerkung 5.5.7 über die Fouriertransformation der Funktionen δ_g

10. Der Dimensionssatz [10.01.]: §§6.1.1–6.1.4, 6.1.6, 6.2.1–6.2.8; definieren Sie ganze algebraische Zahlen wie in 6.1.1 und geben Sie die Beispiele 6.1.2 und 6.1.3; rationale, ganze algebraische Zahlen sind ganz; die ganzen algebraischen Zahlen bilden einen Ring (vgl. 6.1.6; ohne Beweis – zeigen Sie aber, dass die Menge der ganzen algebraischen Zahlen abgeschlossen ist unter der komplexen Konjugation); Werte von Charakteren sind ganze algebraische Zahlen; die Verschärfung in 6.2.3; der Dimensionssatz; gruppentheoretische Anwendungen (mindestens 6.2.6; falls Zeit bleibt auch 6.2.7 und 6.2.8)

11. Induktion und Frobeniusreziprozität [17.01.]: §§8.1.1–8.1.4 und Teile von §8.2; Restriktion von Funktionen; Restriktion von Klassenfunktionen; Induktion von Klassenfunktionen; Frobeniusreziprozität für Klassenfunktionen; die explizite Formel 8.1.4 für induzierte Klassenfunktionen; Restriktion von Darstellungen (vgl. Beginn von §8.2); Induktion von Darstellungen (definieren Sie $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ wie in Aufgabe 8.11); Frobeniusreziprozität für Darstellungen: für $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$ ist die durch $F \mapsto (w \mapsto F(w)(1))$ definierte Abbildung $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \mathrm{Ind}_H^G(\rho)) \to \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(\varphi), \rho)$ ein $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus ist; die Charakterformel $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(\rho)} = \mathrm{Ind}_H^G(\chi_\rho)$ (vgl. letzte Zeilen Seite 103)

12. Das Irreduzibilitätskriterium von Mackey [24.01.]: §§8.3.1–8.3.8; Induktion erhält im Allgemeinen nicht die Irreduzibilität von Darstellungen und Charakteren; disjunkte Darstellungen; Charakterisierung von Disjunktheit über die Orthogonalität von Charakteren; Doppelnebenklassen; die Mackeyformel für die Restiktion einer induzierten Klassenfunktion; das Irreduzibilitätskriterium von Mackey; Vereinfachung im Fall $H \trianglelefteq G$; Beispiel 8.3.8

13. Partitionen und Young-Tableaux [31.01.]: §§10.1.1–10.1.15; Partitionen positiver ganzer Zahlen; Erinnerung an die Zyklenzerlegung einer Permutation; das Young-Diagramm einer Partition; konjugierte Partitionen; die Dominanzordnung für Partitionen; die Young-Tableaux einer Partition; die technische Proposition 10.1.13 mit Beispiel 10.1.14; das Dominanzlemma

14. Die irreduziblen Darstellungen von S_n [07.02.]: §§10.2.1–10.2.10, 10.2.13–10.2.14, 10.2.17; Spaltenstabilisatoren; die Tabloide einer Partition λ; die S_n-Operation auf der Menge T^λ der λ-Tabloide; die Formel $|T^\lambda| = n!/\lambda_1! \cdots \lambda_\ell!$; die Darstellung $\varphi^\lambda : S_n \to \mathrm{GL}(M^\lambda)$ einer Partition λ; das Polytabloid e_t eines λ-Tableau t; die Sprecht-Darstellung ψ^λ einer Partition λ; das Beispiel der alternierenden Darstellung; formulieren Sie Lemma 10.2.12 ohne Beweis; die Selbstadjungiertheit von A_t; der Unterdarstellungssatz; die Irreduzibilität von ψ^λ; formulieren Sie den Klassifikationssatz 10.2.17 ohne Beweis

Literatur

[1] W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory – A First Course*, Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer, 2004

[2] B. Steinberg: *Representation Theory of Finite Groups – An Introductory Approach*, Universitext, Springer, 2012

Die Hauptquelle [2] ist über die Universitätsbibliothek online frei zugänglich. Darüber hinaus finden Sie im Internet zahlreiche Vorlesungsskripten zur Darstellungstheorie, die Sie ergänzend hinzuziehen können.